כלכלות משולבות – פארטו יעילות

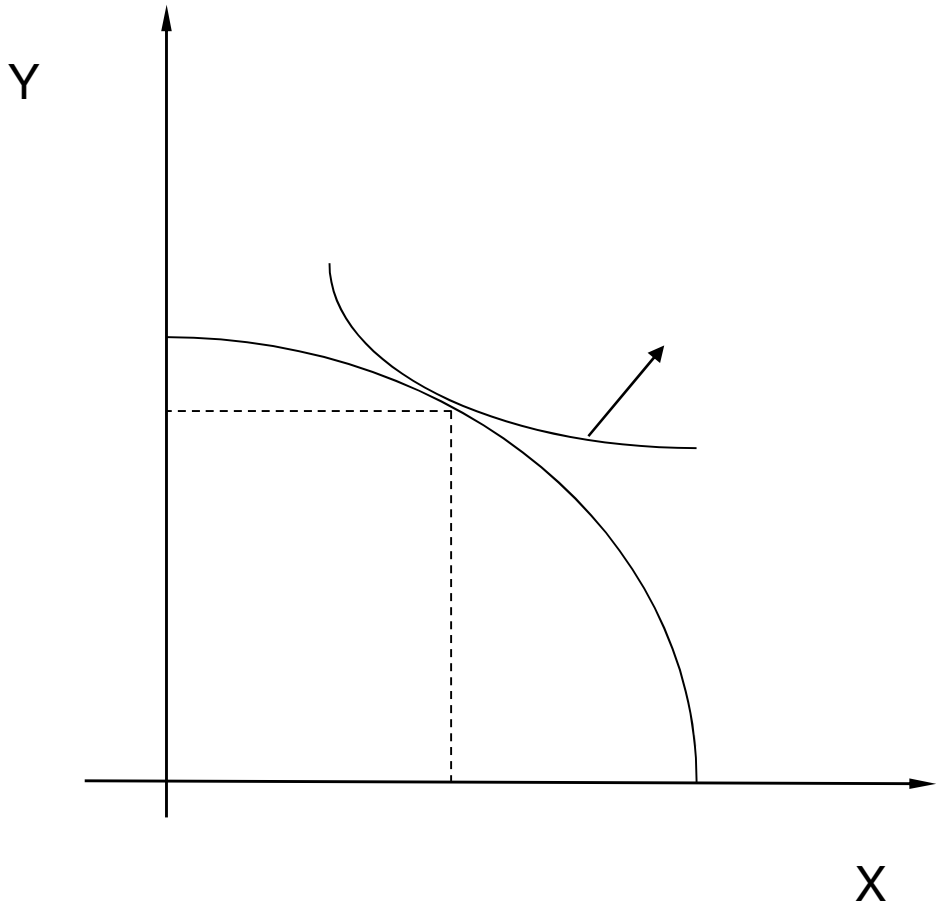
פרט מול עקומת תמורה

- נניח כי יש פרט אחד, שני מוצרים (X ו – Y) ועקומת תמורה (H(X,Y)=B).
- הקצאה היא תכנית ייצור ותכנית צריכה.
- הקצאה הינה לכן רביעיית מספרים (X_C,Y_C) , (X_P,Y_P).
- הקצאה הינה אפשרית אם תכנית הייצור ((X_P,Y_P)) עומדת במגבלת עקומת התמורה, ותכנית הצריכה ((X_C,Y_C)) ממצה (כשאין השלכה חופשית) את הכמויות המיוצרות. כלומר $X_P=X_C$, $Y_P=Y_C$.
- באופן גראפי, הקצאה אפשרית הינה נקודת ייצור על או מתחת לעקומת התמורה, ונקודת צריכה שמתלכדת איתה.
- מהי הקצאה פארטו יעילה?
- הקצאה אפשרית שאין שום הקצאה אפשרית אחרת ששולטת עליה פארטו.

פרט מול עקומת תמורה – (1)

- כיצד נקבע אם הקצאה הינה פארטו יעילה?
- נעביר דרכה עקומת אדישות של הפרט.
- במידה והיא "חותכת" את עקומת התמורה נוצרת עדשה.
- הקצאות בתוך העדשה שולטות פארטו על ההקצאה המקורית.
- הקצאה פנימית (אף קואורדינטה אינה מתאפסת) המהווה נקודת חיתוך אינה פארטו יעילה.
- כל הקצאה פארטו יעילה פנימית חייבת להיות נקודת השקה. כלומר חייבת לקיים MRS=RPT.
- כל נקודת השקה פנימית הינה פארטו יעילה במידה ועקומת האדישות ועקומת התמורה "מתנהגות יפה".

פרט מול עקומת תמורה – הצגה גראפית



דוגמה 9

עקומת התמורה $X^2+Y^2=300$; העדפות הפרט $U=X^{\frac{1}{3}}Y^{\frac{2}{3}}$

$$MRS=\frac{Y}{2X};RPT=\frac{X}{Y}$$

$$\frac{Y}{2X}=\frac{X}{Y}$$ תנאי ההשקה

$$X^2+Y^2=300$$ מגבלת המקורות

מפתרון שתי המשוואות מתקבל כי: $Y=200^{0.5}=14.14$, $X=10$

פארטו יעילות כפתרון של בעיית מקסימום

- נשים לב כי ההקצאה היעילה פותרת למעשה את הבעיה:

$$Max \quad X^{1/3}Y^{2/3}$$

$$S.T.$$

$$X^2 + Y^2 = 300$$

$$X, Y \geq 0$$

פתרון בעיית מקסימום זו בטכניקת הלאגראנג'יאן תביא אותנו כמובן לאותו תנאי השקה ולאותו פתרון.

שני פרטים מול עקומת תמורה

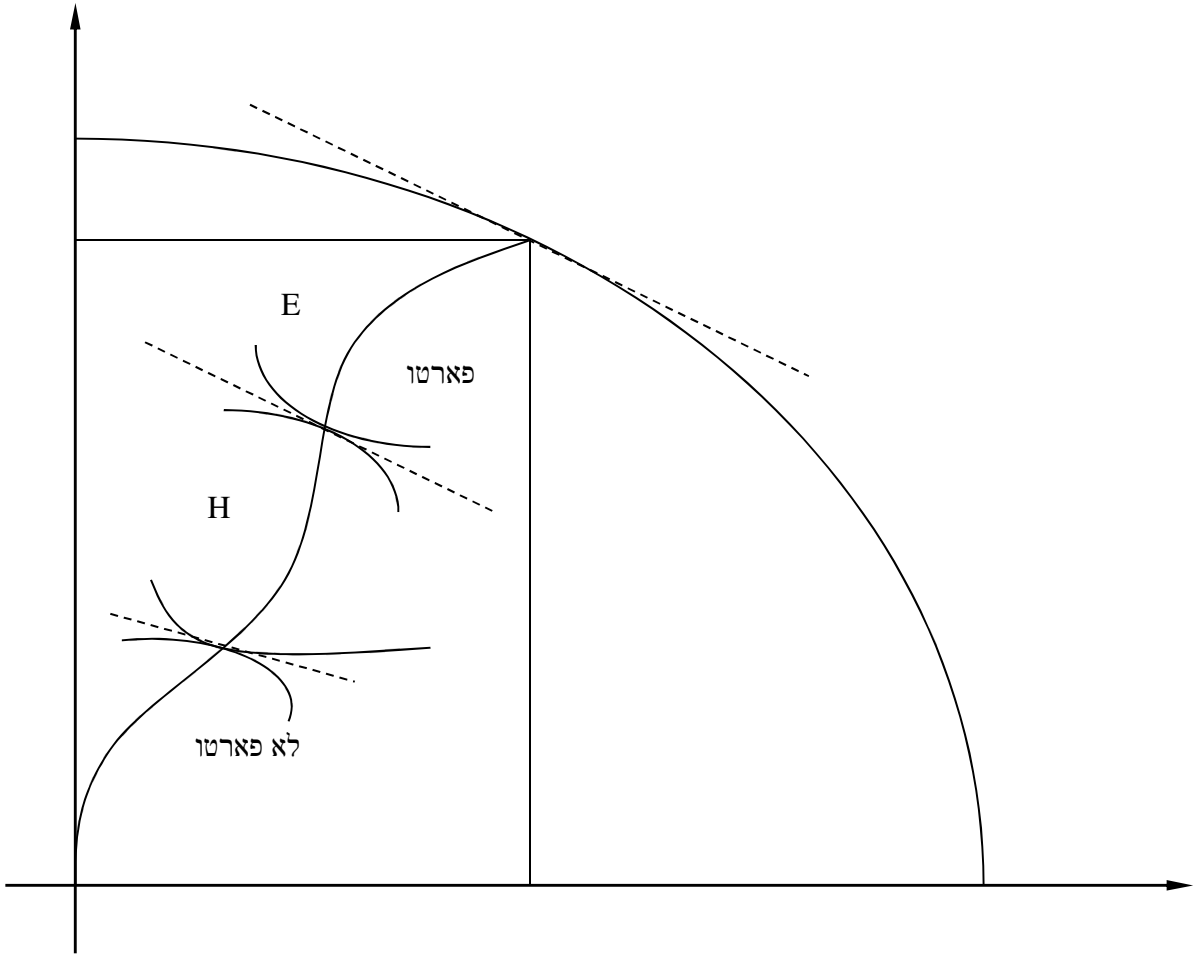
- נניח כי יש שני פרטים (U_1,U_2), שני מוצרים (X ו – Y) ועקומת תמורה ($H(X,Y)=B$).
- הקצאה הינה תכנית ייצור ותכנית צריכה
- הקצאה הינה לכן שישיית מספרים: תכנית ייצור (X_P,Y_P) ותכנית צריכה (x_1,y_1) (x_2 ,y_2).
- ההקצאה הינה אפשרית (בלי השלכה חופשית) אם:
  - (X_P,Y_P) עומדת במגבלת עקומת התמורה
  - $x_1 + x_2 = X_P$
  - $y_1 + y_2 = Y_P$

  $x_1,y_1,x_2,y_2 \geq 0$
- באופן גראפי, הקצאה אפשרית הינה נקודת ייצור על עקומת התמורה, שמגדירה תיבת אדג'וורת (של מוצרים), ונקודת צריכה בתוך תיבה זו.
- מהי הקצאה פארטו יעילה?
- הקצאה אפשרית שאין שום הקצאה אפשרית אחרת ששולטת עליה פארטו.

שני פרטים מול עקומת תמורה – (1)

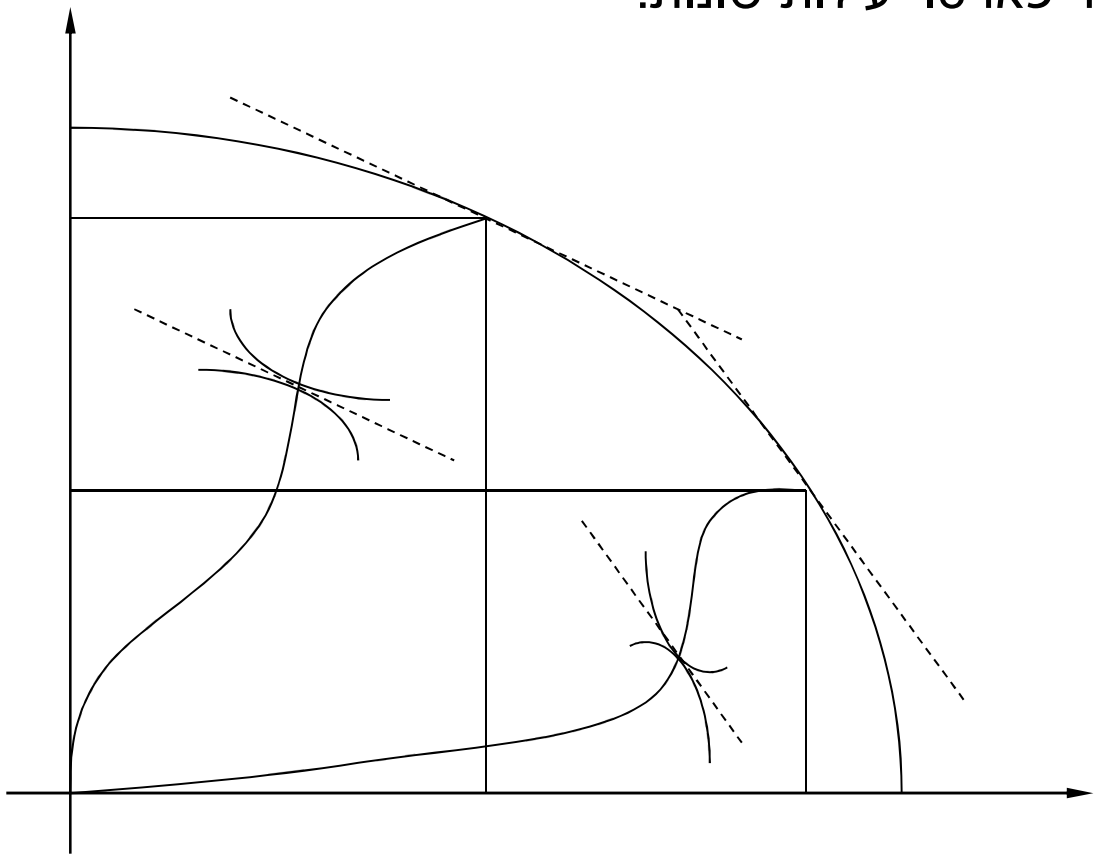
- כיצד נקבע אם הקצאה הינה פארטו יעילה?
- נעביר דרך נקודת הצריכה עקומות אדישות של שני הפרטים.
- במידה והן "נחתכות" נוצרת עדשה.
- הקצאות בתוך העדשה שולטות פארטו על ההקצאה המקורית.
- **הקצאה פנימית פארטו יעילה חייבת לקיים $MRS_1=MRS_2$.**
- האם ניתן להשיג שיפור פארטו על ידי שינוי נקודת הייצור?
- נעביר "העתק" של עקומת האדישות של פרט 1 דרך נקודת הייצור.
- אם ההעתק חותך את עקומת התמורה נוצרת עדשה.
- "בתוך עדשה זו" ישנן תכניות ייצור שמאפשרות תכניות צריכה שמהוות שיפור פארטו.
- **הקצאה פנימית פארטו יעילה חייבת לקיים $MRS_1=RPT$.**

שני פרטים מול עקומת תמורה



שני פרטים מול עקומת תמורה

תתכנה נקודות יצור פארטו-יעילות שונות:



הקצאות פינתיות ויעילות פארטו

- תנאים הכרחיים לפארטו יעילות בהקצאה בה $X_2=0$ (וכל שאר המשתנים חיוביים ממש) הינם:
  - $MRS_1=RPT$ (זו הקצאה פנימית עבור פרט 1)
  - $MRS_1 \geq MRS_2$
- תנאים הכרחיים לפארטו יעילות בהקצאה בה $Y_1=0$ (וכל שאר המשתנים חיוביים ממש) הינם:
  - $MRS_2=RPT$ (זו הקצאה פנימית עבור פרט 2)
  - $MRS_1 \geq MRS_2$
- תנאים אלו יהיו מספיקים כשהעקומות תתנהגנה יפה.

שני פרטים מול עקומת תמורה – סיכום

- כל הקצאה פארטו יעילה פנימית חייבת לקיים:
  - $MRS_1 = MRS_2$ (יעילות בצריכה)
  - $MRS_1 = RPT$ (ייצור מותאם להעדפות הפרטים)
- התנאי הראשון מבטיח כי שני הפרטים אינם יכולים להרוויח על ידי החלפות ביניהם.
- התנאי השני מבטיח כי הם לא ירוויחו על ידי החלפות עם מנגנון הייצור.
- הקצאות פארטו יעילות פינתיות תקיימנה שוויונים ואי שוויונים בהתאם ל"פינה".
- תנאים אלו מספיקים כאשר כל העקומות מתנהגות יפה.

דוגמה 10 (בהמשך ל דוגמה 9)

$$U_1 = X_1 Y_1 \; ; U_2 = X_2^{1/3} Y_2^{2/3} \; ; \; X^2 + Y^2 = 300$$

$$\frac{Y_1}{X_1} = \frac{Y_2}{2X_2} \quad (\text{יעילות בצריכה})$$

$$\frac{Y_1}{X_1} = \frac{X_P}{Y_P} \quad (\text{התאמת הייצור להעדפות הפרטים})$$

$$X_1 + X_2 = X_P$$

$$Y_1 + Y_2 = Y_P \quad (\text{מגבלת המקורות})$$

$$X_P^2 + Y_P^2 = 300$$

מכיוון שהעקומות מתנהגות יפה אוסף הפתרונות לחמשת משוואות אלו הינו אוסף ההקצאות הפארטו יעילות הפנימיות.

דוגמא 8

- כיצד עובדים עם תנאים אלו?
  - בהינתן הקצאה אפשרית ניתן לבדוק אם היא יעילה.
  - בהינתן תכנית ייצור ניתן לבדוק האם היא חלק מהקצאה יעילה, ומהן תכניות תצרוכת המתאימות לה.
  - ובסה"כ מוצאים נקודת ייצור והקצאה שלה לפרטים כך שהשילוב שלהם פארטו יעיל.

דוגמא 10
פתרונות פינתיים ביותר

$$y_P = \left(300 - x_P^2\right)^{1/2}$$

$$RPT = x_P\left(300 - x_P^2\right)^{-1/2} = \frac{x_P}{y_P}$$

If we give all to consumer 1, then

$$x_1 = x_P \text{, so } MRS^1 = RPT \;\Rightarrow\; \frac{x_P}{y_P} = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\Rightarrow\; x^2 = y^2 = \left(300 - x^2\right) \;\Rightarrow\; x = y = 150^{1/2}$$

If we give all to consumer 2, then $x_2 = x_P$,

$$\text{so } MRS^2 = RPT \;\Rightarrow\; \frac{x_P}{y_P} = \frac{y_2}{2x_2}$$

$$\Rightarrow\; 2x^2 = y^2 = \left(300 - x^2\right) \;\Rightarrow\; x = 10,\ y = 200^{1/2}$$

דוגמא 10
פתרונות פנימיים

- את כל הנקודות הפארטו יעילות הפנימיות ניתן למצוא ע"י פתרון המשוואות $MRS_1=MRS_2=RPT$

$$x_P\left(300-x_P^2\right)^{-1/2}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{2x_2}$$

$$x_1+x_2=x_P \quad , \quad y_1+y_2=y_P$$

$$y_P=\left(300-x_P^2\right)^{1/2}$$

פתרון 5 המשוואות ב-6 נעלמים ייתן את כל הנקודות הפארטו יעילות הפנימיות.

דוגמא 10
פתרונות פנימיים

- בדוגמא זו כל נקודות הייצור בין שתי נקודות הפינתיות שמצאנו הינן חלק מהקצאה פארטו יעילה. לכל אחת מהן תתאים חלוקת תצרוכת יחידה שביחד איתה תהווה הקצאה פארטו יעילה.

דוגמא 10

- כיצד נמצא חלוקת תצרוכת יעילה המתאימה לנקודת ייצור נתונה?
- נקודת ייצור $X_P = 11.59$, $Y_P = 12.88$
- RPT=0.9
- נמתח מהראשית של פרט 1 ((0,0)) את הקו $\frac{y_1}{x_1}$=0.9 שלאורכו MRS_1=0.9.
- מהראשית של פרט 2 ((11.59,12.88)) נמתח את הקו $\frac{y_2}{2x_2}$=0.9 שלאורכו RS_2=0.9.
- שני קווים אלו נחתכים בנקודה:

$X_1 = 8.87, Y_1 = 7.98$ ו – X_2=2.72, $Y_2 = 4.89$

זו חלוקת התצרוכת היעילה המתאימה לנקודת הייצור ממנה התחלנו.

יעילות משולבת - 2^3

- כאשר "מחליפים" את עקומת התמורה בשני יצרנים (של X ו – Y עם פונקציות ייצור f ו – g) ושני גורמי ייצור (K ו – L) נוסף תנאי השקה נוסף והוא שוויון ה – MRTS.
- הקצאה פארטו יעילה פנימית חייבת לקיים:
  - $TRS_X=TRS_Y$ (ייצור יעיל)
  - $MRS_1=MRS_2$ (צריכה יעילה)
  - $MRS_1=RPT$ (ייצור מותאם לצריכה)
  - מגבלות מקורות במישור גורמי הייצור ומישור המוצרים

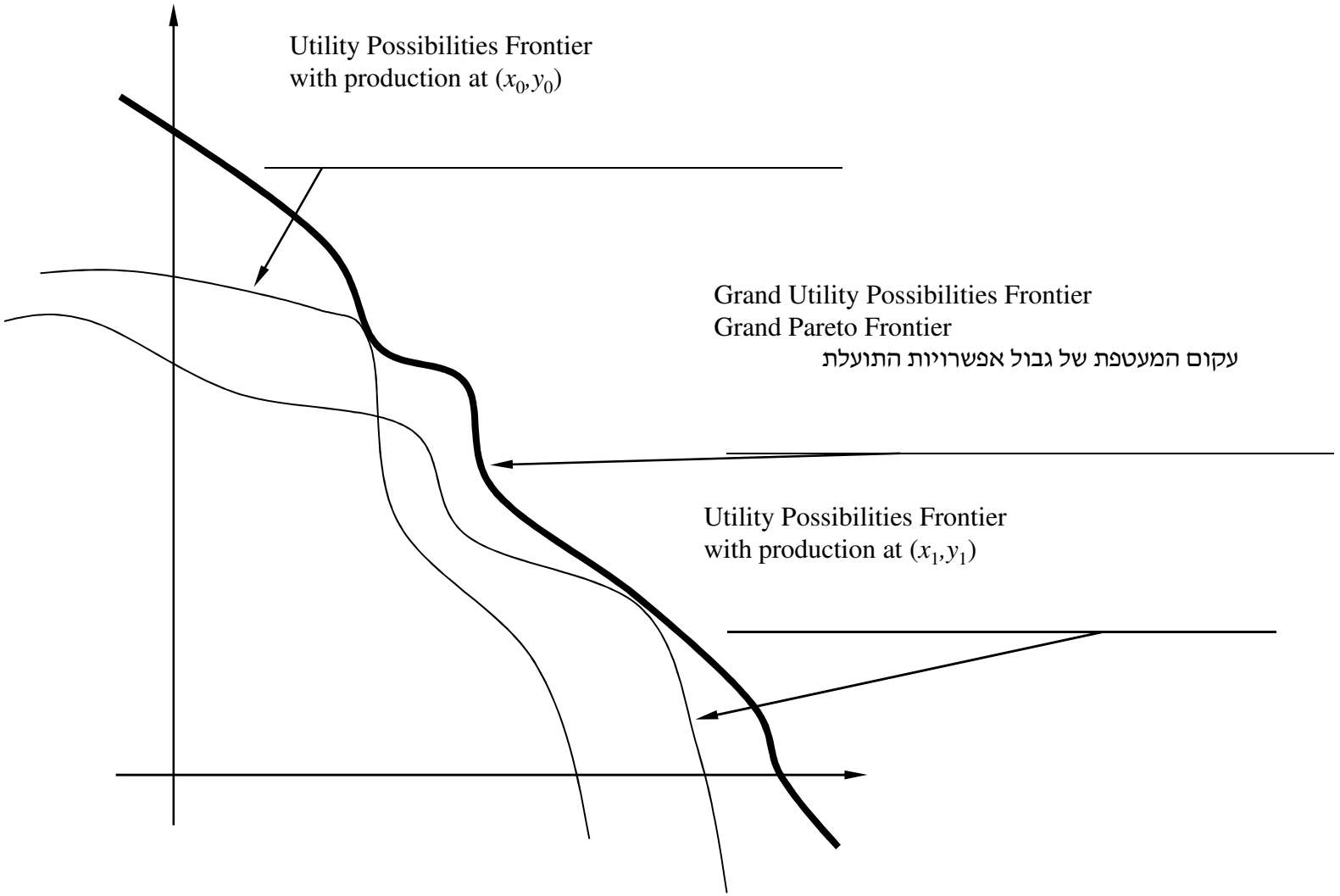
גבול אפשרויות התועלת הכולל

- בהינתן נקודת ייצור אנו יודעים למצוא את גבול אפשרויות התועלת:

  - מוצאים את קבוצת פארטו המתאימה ולכל U_A מתאימים את U_B.

- איך נמצא את גבול אפשרויות התועלת כאשר ניתן לבחור נקודות ייצור שונות?
- כלומר, איך נתאר את כל הנקודות הפארטו-יעילות בגרף U_B (U_A)?

גבול אפשרויות התועלת הכולל



קבלת התנאים לפארטו יעילות בטכניקת הלאגראנג'יאן

הקצאה פארטו יעילה פותרת (תחת הנחות סבירות) בעייה מהצורה:

$$\text{Max} \quad u_1(X_1, Y_1)$$

S. T.

$$u_2(X_2, Y_2) \geq A$$

$$X_1+X_2 \leq f(K_x, L_x)$$

$$Y_1+Y_2 \leq g(K_y, L_y)$$

$$K_x+K_y \leq \overline{K}$$

$$L_x+L_y \leq \overline{L}$$

$$X_1, Y_1, X_2, Y_2, K_x, K_y, L_x, L_y \geq 0$$

התנאים מסדר ראשון המאפיינים פתרון בעייה זו הינם למעשה התנאים מסדר ראשון לפארטו יעילות פנימית.

טכניקת הלאגראנג'יאן – (1)

הלאגראנג׳יאן של בעיה זו ניתן על ידי:

$$L=u_1(x_1,y_1)+\lambda_1(u_2(x_2,y_2)- A) +$$

$$+\lambda_2(f(K_x,L_x)- x_1 - x_2) +$$

$$+\lambda_3(g(K_y,L_y)- y_1 - y_2)$$

$$+\lambda_4(\overline{K} -K_x-K_y) + \lambda_5(\overline{L} -L_x-L_y)$$

גזירה גוררת את מערכת ה - תס״ר הבאה:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = u_{1x} - \lambda_2 = 0 \; ; \; \frac{\partial L}{\partial y_1} = u_{1y} - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \lambda_1 u_{2x} - \lambda_2 = 0 \; ; \; \frac{\partial L}{\partial y_2} = \lambda_1 u_{2y} - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_x} = \lambda_2 f_K - \lambda_4 = 0 \; ; \; \frac{\partial L}{\partial K_y} = \lambda_3 g_K - \lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial L_x} = \lambda_2 f_L - \lambda_5 = 0 \; ; \; \frac{\partial L}{\partial L_y} = \lambda_3 g_L - \lambda_5 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = f(K_x, L_x) - x_1 - x_2 = 0 \; ; \; \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = g(K_y, L_y) - y_1 - y_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = \overline{K} - K_x - K_y = 0 \; ; \; \frac{\partial L}{\partial \lambda_5} = \overline{L} - L_x - L_y = 0$$

טכניקת הלאגראנג'יאן – (2)

- ארבעת התנאים האחרונים הינם למעשה מגבלת המקורות.
- שמונת התנאים הראשונים מכילים את תנאי ההשקה.
- כופלי הלאגראנג' הינם בשלב זה כלי עזר טכני (למעשה ניתן להראות שהם מחירי צל או לחילופין מספקים מחירים תומכים להקצאה היעילה – יובהר בהמשך).
- בשמונת המשוואות הראשונות מופיעים חמישה כופלים, באופן מכני נרצה להיפטר ממשתנים אלו וכך לסיים עם שלוש משוואות ("משוואה תמורת נעלם").

טכניקת הלאגראנג'יאן – (3)

מתוך ארבעת המשוואות הראשונות מתקבל:

$$\frac{u_{1x}}{u_{1y}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}; \frac{u_{2x}}{u_{2y}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \Rightarrow \frac{u_{1x}}{u_{1y}} = \frac{u_{2x}}{u_{2y}}$$

מתוך ארבעת המשוואות הבאות מתקבל:

$$\frac{f_K}{f_L} = \frac{\lambda_4}{\lambda_5}; \frac{g_K}{g_L} = \frac{\lambda_4}{\lambda_5} \Rightarrow \frac{f_K}{f_L} = \frac{g_K}{g_L}$$

We also have:

$$\frac{u_{1x}}{u_{1y}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \text{ and } \frac{g_K}{f_K} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \Rightarrow \frac{u_{1x}}{u_{1y}} = \frac{g_K}{f_K}$$

טכניקת הלאגראנג'יאן – (4)

כלומר אנו מקבלים את שלושת תנאי ההשקה הבאים:

$$\frac{f_K}{f_L} = \frac{g_K}{g_L} \quad \text{(ייצור יעיל)}$$

$$\frac{u_{1x}}{u_{1y}} = \frac{g_K}{f_K} \quad \text{(ייצור מותאם לצריכה)}$$

$$\frac{u_{1x}}{u_{1y}} = \frac{u_{2x}}{u_{2y}} \quad \text{(צריכה יעילה)}$$

באופן דומה ניתן לנתח כל תרחיש ולהגיע לתנאים מסדר ראשון המאפיינים פארטו יעילות על ידי ניסוח הלאגראנג׳יאן המתאים.

דוגמה - תרחיש ה "קרקע"

הניחו כי ישנם 2 מוצרים x ו – y, ושני פרטים עם העדפות U_1 ו – U_2. למשק יש כמות תחילית $\bar{x}$ של x וניתן לייצר את y באמצעות x לפי פונקציית הייצור:

$$y=g(x_p).$$

הבעייה אותה תפתור הקצאה פארטו יעילה הינה:

$$\text{Max} \quad u_1(x_1,y_1)$$

S. T.

$$u_2(x_2,y_2) \geq A$$

$$x_1+x_2+x_p \leq \bar{x}$$

$$y_1+y_2 \leq g(x_p)$$

$$x_1,y_1,x_2,y_2,x_p \geq 0$$

לקבלת התנאים מסדר ראשון המאפיינים פתרון בעייה זו ננסח את הלאגראנג'יאן ונקבל:

דוגמה - תרחיש "קרקע"

$L= u_1(x_1,y_1) + \lambda_1(u_2(x_2,y_2) - A) +$

$\lambda_2(\bar{x} - x_1 - x_2 - x_p) + \lambda_3(g(x_p) - y_1 - y_2)$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = u_{1x} - \lambda_2 = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y_1} = u_{1y} - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \lambda_1 u_{2x} - \lambda_2 = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y_2} = \lambda_1 u_{2y} - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_p} = \lambda_3 g' - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \bar{X} - x_1 - x_2 - x_p = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = g(x_p) - y_1 - y_2 = 0$$

שני התנאים האחרונים הינם למעשה מגבלת המקורות. בתוך חמשת התנאים הראשונים "מסתתרים" תנאי ההשקה.

דוגמה - תרחיש "קרקע"

מתוך ארבעת המשוואות הראשונות מתקבל:

$$\frac{u_{1x}}{u_{1y}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \quad \frac{u_{2x}}{u_{2y}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \quad or \quad \frac{u_{1x}}{u_{1y}} = \frac{u_{2x}}{u_{2y}}$$

תוך שימוש במשוואה הבאה מתקבל:

$$g' = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \quad We \quad also \quad have \quad \frac{u_{1x}}{u_{1y}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$$

$$and \quad we \quad get \quad \frac{u_{1x}}{u_{1y}} = g'$$

כלומר אנו מקבלים את שני תנאי ההשקה הבאים:

$$\frac{u_{1x}}{u_{1y}} = \frac{u_{2x}}{u_{2y}} \quad (eff \ . \ cons \ ., \ equal \quad MRS \ )$$

$$\frac{u_{1x}}{u_{1y}} = g' \ (\ prod \ . - cons \ . \ matchup \quad , \ MRS \ = \ RPT \ )$$

$$(\ production \quad is \ always \quad efficient \ )$$

משוואתה של עקומת התמורה בכלכלה זו ניתנת על ידי: $Y=g(\overline{X}-X)$

דוגמא לתרגול עצמי

תיאור הכלכלה:

$U_1=(X_1+1)(Y_1+1)$; $U_2=(X_2+1)(Y_2+1)$

$2X_P+Y_P=240$

- עקומות האדישות והתמורה מתנהגות "יפה". לכן כל הקצאה פארטו יעילה פנימית ניתנת על ידי מערכת התנאים הבאה:

(שימו לב שה – RPT שווה ל – 2)

$$\frac{Y_1+1}{X_1+1}=\frac{Y_2+1}{X_2+1}$$ *צריכה יעילה*

$$\frac{Y_1+1}{X_1+1}=2$$ *ייצור מותאם להעדפות*

$$2(X_1+X_2)+(Y_1+Y_2)=240$$ *עקומת התמורה*

דוגמא לתרגול עצמי

מתקבל כי בכל הקצאה פארטו יעילה פנימית:

$$y_1 = 2x_1 + 1$$
$$y_2 = 2x_2 + 1$$
$$or$$
$$(Y_1 + Y_2) = 2(X_1 + X_2) + 2$$
$$\text{since}$$
$$2(X_1 + X_2) + (Y_1 + Y_2) = 240$$
$$we\ get$$
$$Y_1 + Y_2 = 121\ ;\ X_1 + X_2 = 59.5$$

כלומר אנו מקבלים נקודת ייצור יחידה (נסמנה ב – A) על עקומת התמורה , המשותפת לכל ההקצאות היעילות הפנימיות.

דוגמא לתרגול עצמי

- תיאור מלא של ההקצאות היעילות הפנימיות הוא לכן:

  ייצור בנקודה A ו –

  $Y_1=2X_1+1$; $Y_2=2X_2+1$

- מנקודת ראותו של פרט 1 אוסף הנקודות היעילות הפנימיות ניתן על ידי הקו הישר מהנקודה (0,1) עד הנקודה (59.5,120).
- בכל הקצאה יעילה פנימית תצרוכת ה – Y של כל פרט גדולה או שווה לאחד.
- כיצד תראינה הקצאות יעילות בהן תצרוכת ה – Y של אחד הפרטים יורדת מתחת לאחד?

דוגמא לתרגול עצמי

נחפש כעת הקצאות פארטו יעילות בהן $0 \le Y_2 < 1$

ו - (ונשער כי אז) $X_2=0$.

במצב כזה התנאים ההכרחיים לפארטו יעילות

הינם : $MRS_1=RPT$ ו - $MRS_2 \le MRS_1$.

כלומר :

$Y_1=2X_1+1$ (MRS_1 שווה ל $-$ RPT)

$Y_1+Y_2=240-2(X_1+X_2)$ (מגבלת המקורות)

ומתקבל (נבטא הכול במונחי Y_2) :

$$X_2=0;X_1=0.25(239-y_2);Y_1=0.5(241-Y_2)$$

שימו לב שאם נציב $Y_2=0$ (כלומר פרט 2 לא מקבל דבר), מקבל פרט 1 את הסל :

$$x_1=59.75 \ ; \ y_1=120.5$$

זו למעשה הנקודה שממקסמת את רווחתו של פרט 1 על עקומת התמורה.

דוגמא לתרגול עצמי

לסיכום קו החוזה בדוגמה זו הינו:

כאשר $Y_1,Y_2\geq 1$

$$Y_1+Y_2=121;X_1+X_2=59.5;Y_1=2X_1+1;Y_2=2X_2+1$$

כאשר $0\leq Y_2<1$

הייצור ניתן על ידי:

$$Y_1+Y_2=120.5+0.5Y_2 \quad ; \quad X_1+X_2=59.75-0.25Y_2$$

הצריכה ניתנת על ידי:

$$X_2=0 \quad ; \quad X_1=0.25(239-y_2) \quad ; \quad Y_1=0.5(241-y_2)$$

כאשר $0\leq Y_1<1$

הייצור והצריכה ניתנים על ידי:

$$Y_1+Y_2=120.5+0.5Y_1 \quad ; \quad X_1+X_2=59.75-0.25Y_1$$

$$X_1=0 \quad ; \quad X_2=0.25(239-Y_1) \quad ; \quad Y_2=0.5(241-Y_1)$$

ל - A מתאימים הרבה צירופי תצרוכת.
לכל נקודת ייצור יעילה אחרת מתאימים בדיוק שני צירופי תצרוכת.
אוסף נקודות הייצור היעילות הינו הקטע על עקומת התמורה בין (59.75,120.5) ו – (59.5,121).