טכנולוגיה – המשך
פונקציית ההוצאות

פונקציית ייצור קוב-דוגלאס

פונקציית ייצור קוב דוגלאס – $F(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}$

כאשר α ו - β חיוביים וקטנים מאחד, הפונקציה מקיימת תפוקה שולית פוחתת.

α היא גמישות התפוקה ביחס ל – K.

β היא גמישות התפוקה ביחס ל – L.

דרגת ההומוגניות של הפונקציה נתונה על ידי $\alpha+\beta$.

פונקציית ייצור זו היא הומוגנית.

פונקציית ייצור זו מקיימת תשואה עולה (יורדת) לגודל כאשר $\alpha+\beta>1$ $(\alpha+\beta<1)$

פונקציית ייצור זו מקיימת תשואה קבועה לגודל כאשר $\alpha+\beta=1$

משפט אוילר גורס שעבור פונקציית תק"ל

$$KMP_K+LMP_L=F(K,L)$$

(לחילופין $KF_K+LF_L=F(K,L)$)

בפונקציית תק"ל קוב דוגלאס α מייצגת את אחוז התוצר המשולם להון (החלק ההון בתוצר) ו - β את אחוז התוצר המשולם לעבודה (החלק העבודה בתוצר)

Paul H. Douglas, 1892-1976

Paul H. Douglas

טכנולוגיית תק"ל - הערות

תהי $F(K,L)$ פונקציית ייצור תק"ל.

אם לשני גורמי הייצור תפוקה שולית חיובית אזי
התפוקה הממוצעת של כל גורם ייצור יורדת
כשכמותו עולה.
מתוך $KMP_K+LMP_L=F(K,L)$
מתקבל $(K/L)MP_K+MP_L=AP_L$
מכיוון ש- MP_K חיובי מתקבל כי $MP_L<AP_L$
ולכן התפוקה הממוצעת יורדת.

גורמי ייצור יקראו מסייעים אם $F_{KL}>0$
גורמי ייצור יקראו מתחרים אם $F_{KL}<0$

אם לשני גורמי הייצור תפוקה שולית פוחתת אזי הם
מסייעים.

גזירה של $F(K,L)=KF_K+LF_L$ לפי L גוררת כי:
$KF_{KL}+F_L+LF_{LL}=F_L$
ומכאן $F_{KL}>0$

שינויים טכנולוגיים

שינויים טכנולוגיים הם שינויים בפונקצית היצור .

נניח כי פונקצית היצור בתקופה t נתונה ע"י :

$$Q_t = A_t F(K_t, L_t)$$

השינויים בתפוקה מתקופה לתקופה יכולים לנבוע

משינויים בתשומות ושינוי ב – A .

שינוי ב – A מבטא שינויים ביעילות כלל המשק .

כשאנו מודדים את שינוי ב – A (נקרא TFP)

נשים לב כי :

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial A} dA + \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL$$

חלוקה ב – Q נותנת

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\partial Q}{\partial A}\frac{A}{Q}\frac{dA}{A} + \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}\frac{dK}{K} + \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q}\frac{dL}{L}$$

או

$$\frac{dQ}{Q} = 1 \cdot \frac{dA}{A} + \eta_{QK}\frac{dK}{K} + \eta_{QL}\frac{dL}{L}$$

במקרה של קוב דאגלס הגמישויות הם מקדמים

שאנו יכולים לאמוד לפי חלקם של כל גורם

ייצור . כל השינויים שלא מוסברים ע"י שינוי ב – A צפוי וכך

ניתן לאמוד את שינוי ב – A .

בעיית מינימום ההוצאות

- המגבלות – עקומה שוות תפוקה
- המטרות – מינימום הוצאות
- דרך הפעולה – ייצור התפוקה המבוקשת באמצעות צירוף גורמי הייצור הזול ביותר בהינתן מחיריהם והתפוקה המבוקשת.
- נתונים
  - רמת תפוקה מבוקשת ומחירי גורמי הייצור
  - טכנולוגיה (בדרך כלל מיוצגת על ידי פונקציית ייצור)
- תוצאות
  - צירוף גורמי ייצור אופטימאלי ורמת הוצאות מינימאלית

מינימום הוצאות

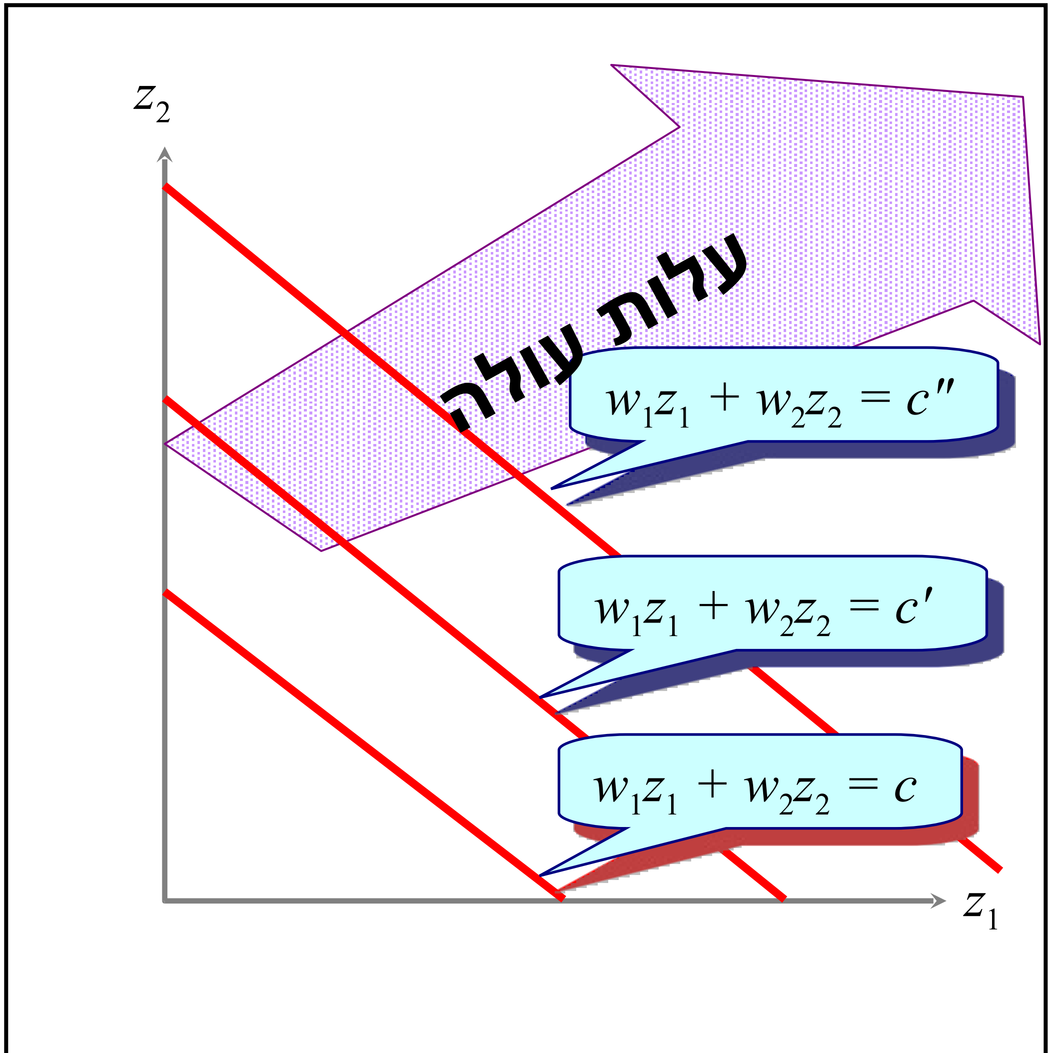
- *נתונה רמת תפוקה מבוקשת* q
- מחירי התשומות נתונים על ידי $w_1,\ldots,w_m$
- אנו רוצים להביא למינימום הוצאות

$$\sum_{i=1}^{m} w_i z_i$$

עקומות שווה הוצאה

- בהינתן מחירים w
- עקום שווה הוצאה הינו אוסף הנקודות z במרחב התשומות
- שעולות אותו דבר במחירים אלו
- אוסף זה מהווה קו ישר

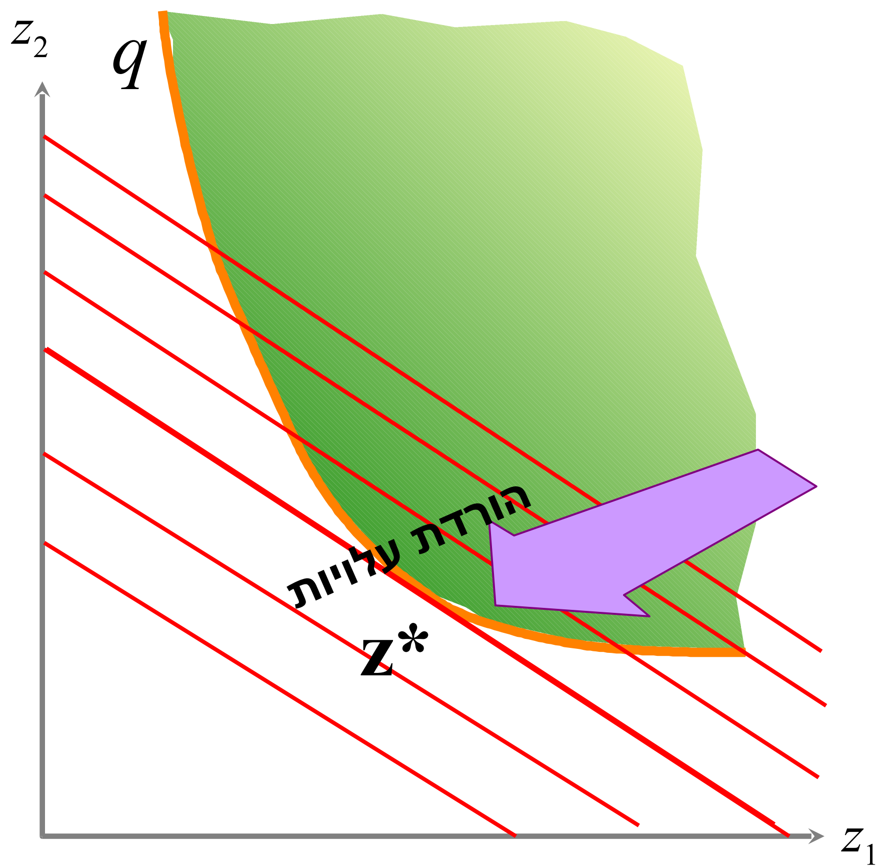
קווים שווי הוצאה



- שרטטו אוסף נקודות שעולה סכום קבוע.
- חזרו על הפעולה עם סכום גבוה יותר
- הוסיפו חץ לשרטוט

השתמש בזאת כדי למצוא אופטימום.

מינימום הוצאות



- **היצרן מביא למינימום הוצאות תחת מגבלת תפוקה**
- **פתרון הבעיה**

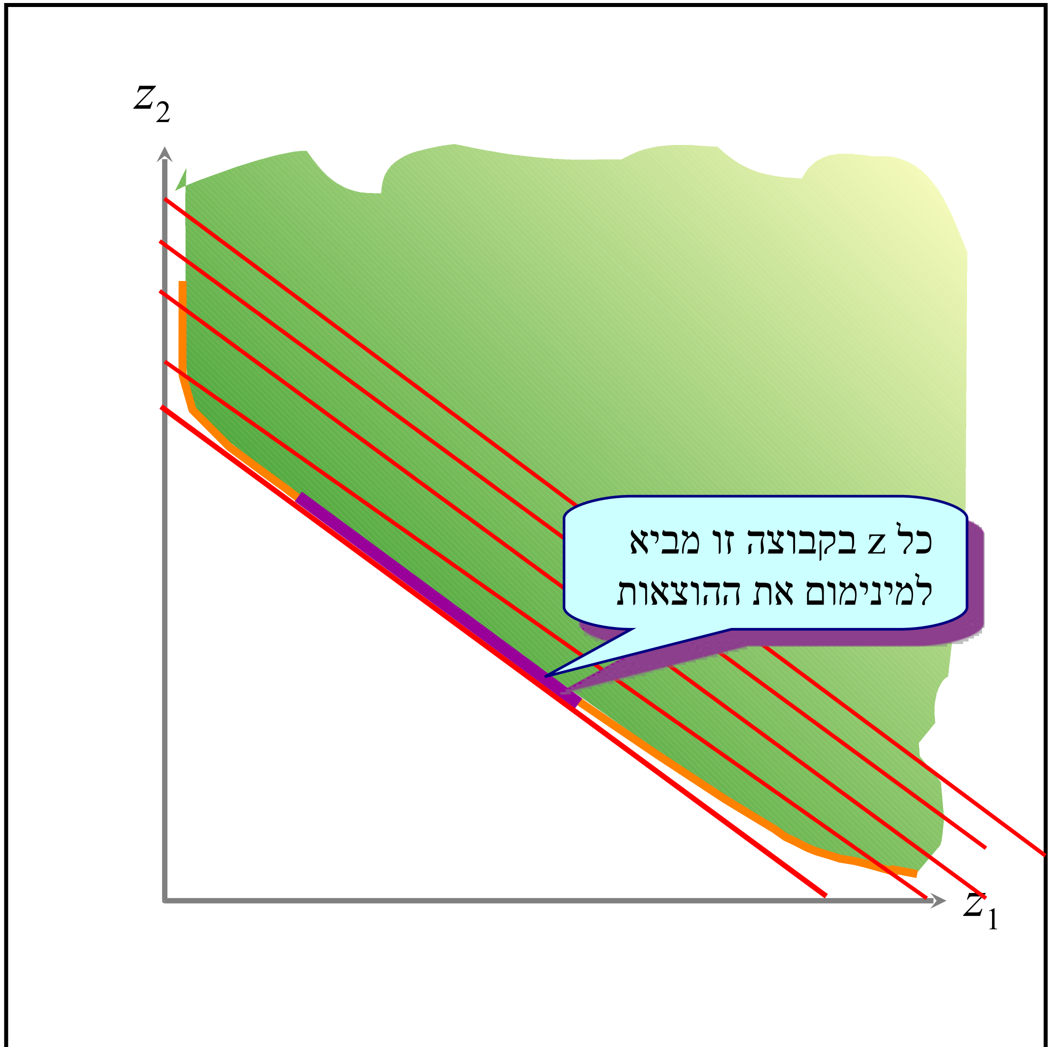
minimise

$$\sum_{i=1}^{m} w_i z_i$$

subject to $F(\mathbf{z}) \geq q$

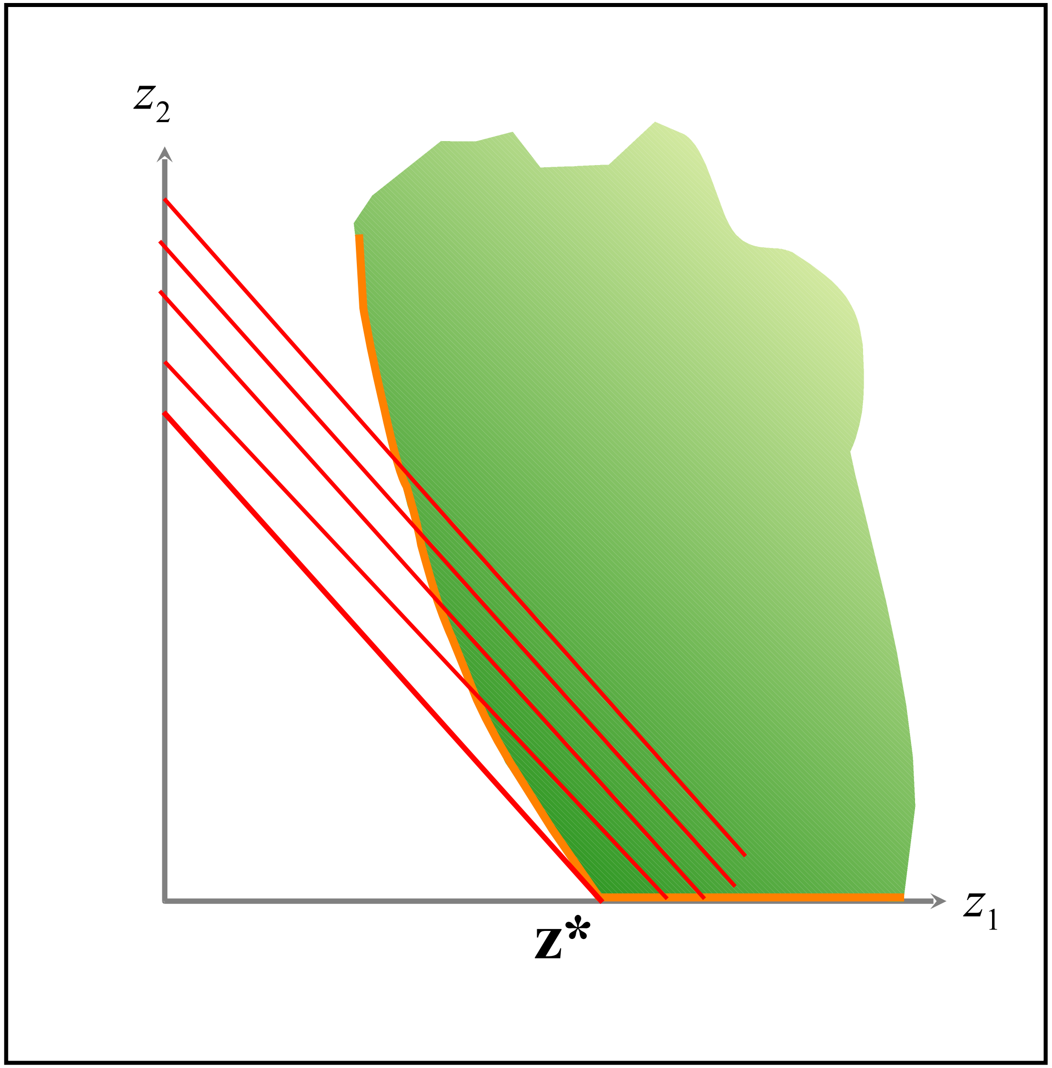
- *מה קורה במקרים אחרים?*

Z מתנהגת יפה אבל לא ממש



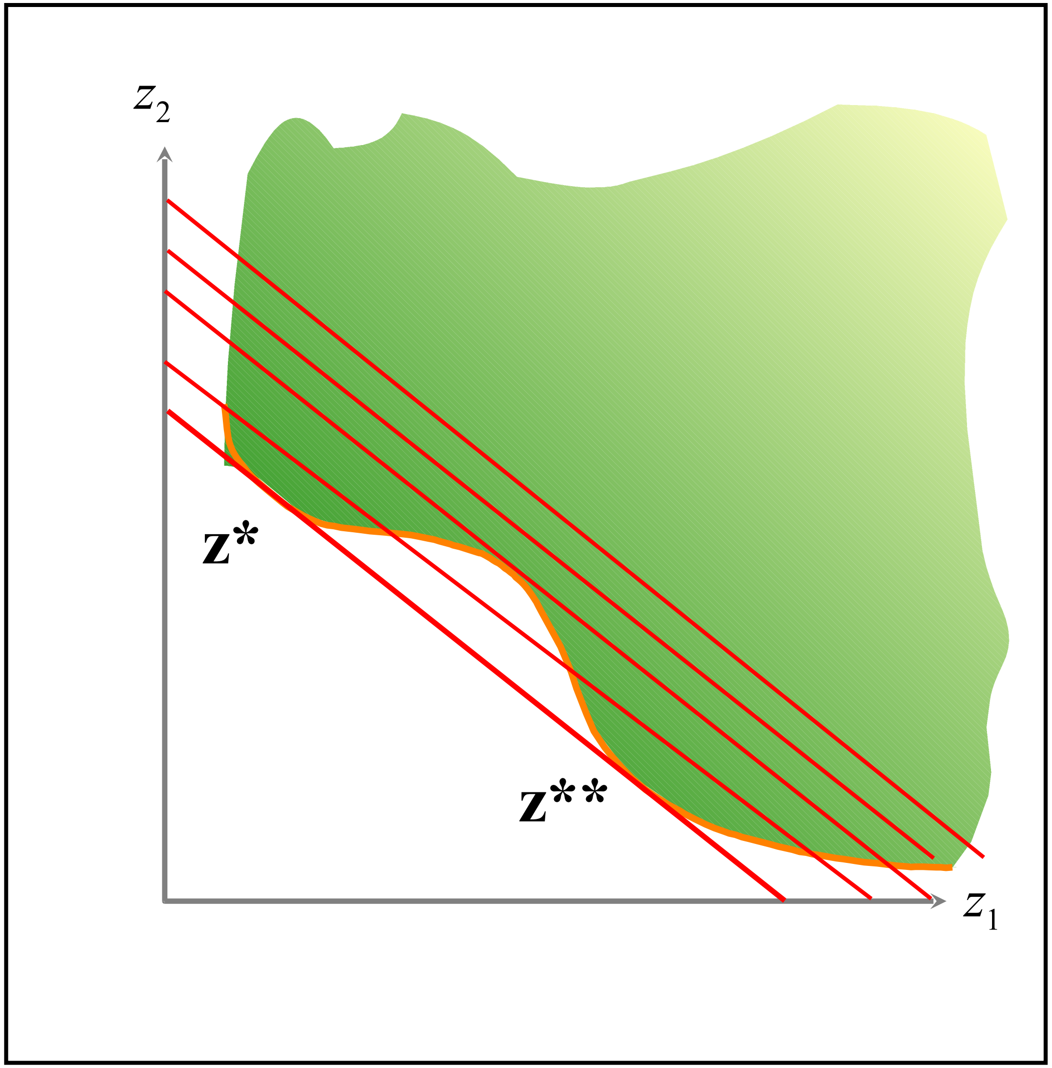
- *רצף של פתרונות*

פתרון פינתי



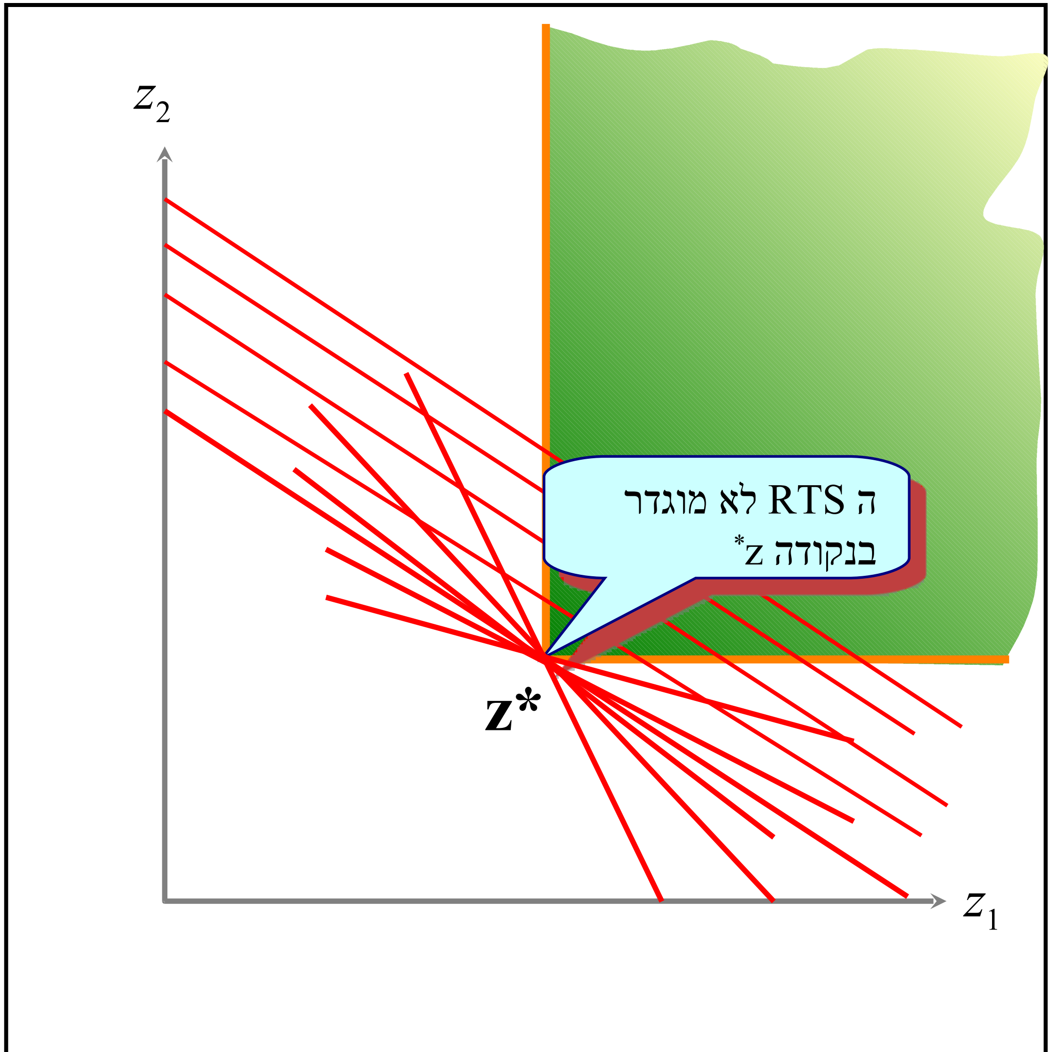
- כאן $RTS_{21}>w_1/w_2$
- תשומה 2 יקרה מדי ולכן לוקחים אפס ממנה.

Z שלא מתנהגת יפה



- *יש מספר פתרונות*
- *שימו לב שאין פתרון בין שני הפתרונות.*

Z לא חלקה



- z^* הוא הפתרון היחיד לכל יחס מחירים.

מינימום הוצאות – פתרון אלגברי

- המסקנה מהשרטוטים היא שיש לשכור גורמי ייצור כך שיחס התפוקות השוליות של כל שני גורמי ייצור שווה ליחס מחיריהם (m-1) תנאי השקה, ולהיות על העקומה שוות תפוקה של q (משוואה m).
- מפתרון מערכת משוואות זו מתקבלים ביקושים לגורמי ייצור שנקראים ביקושים מותנים, המתארים מה הכמות המבוקשת מכל גורם ייצור כפונקצייה של מחירי גורמי הייצור והתפוקה המבוקשת.
- פונקציית ההוצאות מתקבלת מהצבת ביקושים אלו לתוך פונקציית המטרה.

דוגמה מספרית

הטכנולוגיה של הפירמה נתונה על ידי: $F=z_1^{0.5} z_2^{0.3}$

בעיית מינימום ההוצאות היא:

$$\text{Min } w_1 z_1 + w_2 z_2$$

S.T.

$$z_1^{0.5} z_2^{0.3} \geqslant q$$

$$z_1, z_2 \geqslant 0$$

$$L = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \lambda (q - z_1^{0.5} z_2^{0.3})$$

תנאים מסדר ראשון מתקבלים מגזירת

הלגראנג' יאן לפי כל משתני ההחלטה והכפלים

והשוואה לאפס.

בצורה זו מתקבלים כל הפתרונות הפנימיים.

כאן אין פתרונות פינתיים אך במידה והיו, היינו

מקבלים כי בדרך זו את התשומות יוצאת שלילית.

במקרה זה נניח כי תשומה זו מתאפסת באופטימום

ונפתור מחדש (גרפית או אלגברית).

דוגמה מספרית - 1

תנאים מסדר ראשון :

$$\frac{\partial L}{\partial z_1} = w_1 - 0.5\lambda z_1^{-0.5} z_2^{0.3} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_2} = w_2 - 0.3\lambda z_1^{0.5} z_2^{-0.7} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = q - z_1^{0.5} z_2^{0.3} = 0$$

חלוקת משוואה ראשונה בשנייה גוררת :

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{5z_2}{3z_1}$$

(זהו תנאי השקה משווה את יחס התפוקות
השוליות ליחס מחיריהן)

מכאן נמצא את z_2 : $z_2 = \frac{3w_1 z_1}{5w_2}$

נציב לאילוץ התפוקה ונקבל את המשוואה:

דוגמה מספרית - 2

$$z_1^{0.5}\left(\frac{3w_1 z_1}{5w_2}\right)^{0.3} = q$$

$$z_1 = 0.6^{-0.375}\, q^{1.25}\, w_1^{-0.375}\, w_2^{0.375}$$

ומכאן:

$$z_2 = 0.6^{0.625}\, q^{1.25}\, w_1^{0.625}\, w_2^{-0.625}$$

$$C = 1.938\, q^{1.25}\, w_1^{0.625}\, w_2^{0.375}$$

כלומר:

$$z_1(w_1, w_2, q) = 1.211 q^{1.25} w_1^{-0.375} w_2^{0.375}$$

$$z_2(w_1, w_2, q) = 0.727 q^{1.25} w_1^{0.625} w_2^{-0.625}$$

$$C(w_1, w_2, q) = 1.938 q^{1.25} w_1^{0.625} w_2^{0.375}$$

z_1 ו – z_2 הינם הביקושים המותנים.

C הינה פונקציית ההוצאות.

דוגמה מספרית נוספת

תשובות סופיות ביקושים מותנים
ופונקציית הוצאות

$F=K^{0.5}+L^{0.5}$

$$K(q,P_K,P_L)=\left(\frac{P_L q}{P_K+P_L}\right)^2$$

$$L(q,P_K,P_L)=\left(\frac{P_K q}{P_K+P_L}\right)^2$$

$$C(q,P_K,P_L)=\frac{P_K P_L}{P_K+P_L}q^2$$

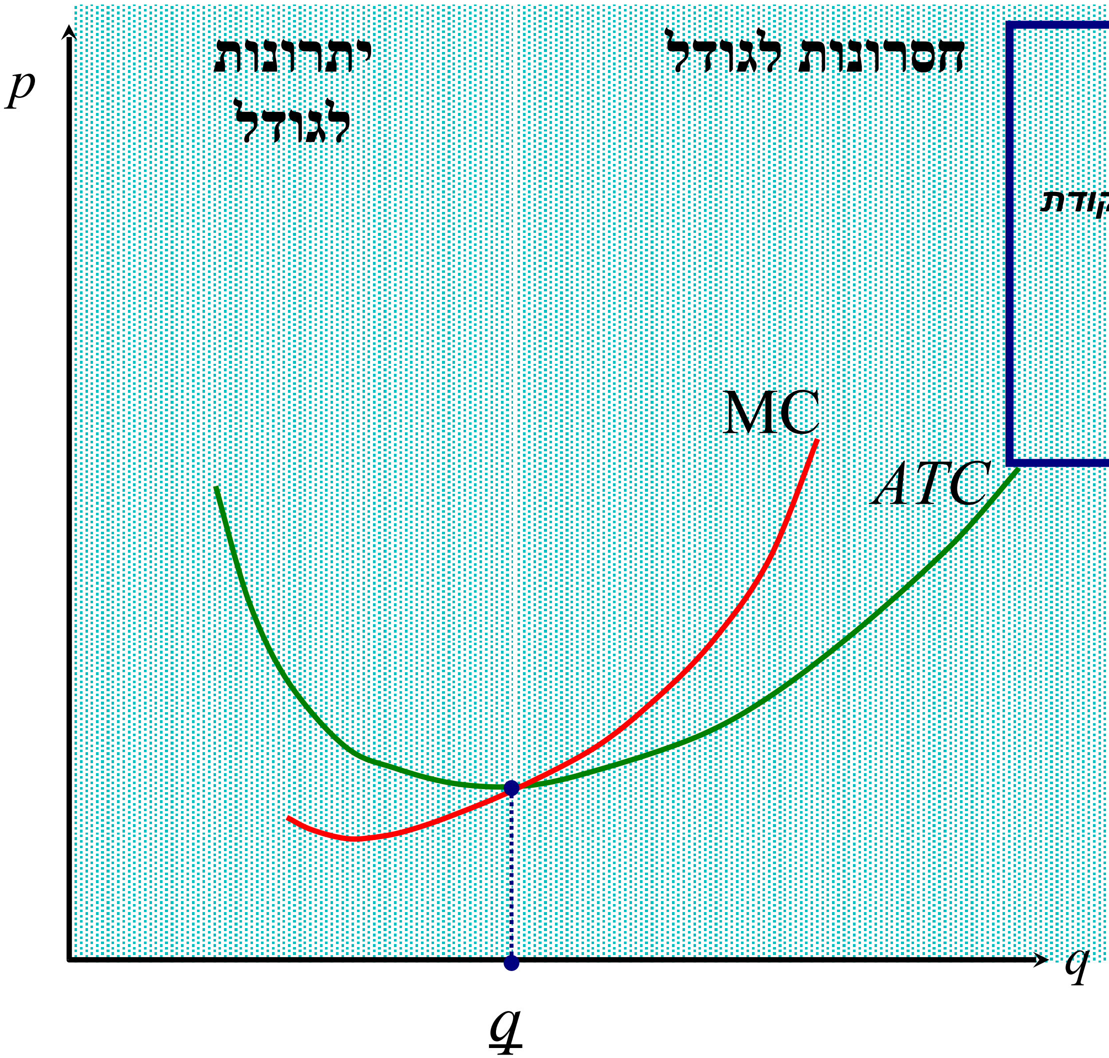
קו ההתרחבות

- קו התרחבות מוגדר כאוסף הצירופים של גורמי הייצור הנבחרים עבור רמות תפוקה שונות, כשמחירי גורמי הייצור קבועים.
- קו ההתרחבות הינו ההשלכה של מערכת הביקוש המותנית על מישור התשומות.
- בשתי הדוגמאות הקודמות קו ההתרחבות יצא קו ישר. זה אינו מקרי מאחר וקווי ההתרחבות הינם קווים ישרים עבור טכנולוגיות הומוטתיות.
- גורם ייצור יקרא נחות אם הביקוש המותנה לגורם הייצור יורד כשהתפוקה עולה. (כלומר לקו ההתרחבות יש שיפוע שלילי)

הוצאה כוללת, ממוצעת, שולית

- ההוצאה הכוללת מסומנת ב TC(q).
- ההוצאה הממוצעת הכוללת מסומנת ב – ATC(q), וניתנת על ידי TC(q)/q.
- ההוצאה השולית מסומנת ב – MC(q), וניתנת על ידי dTC(q)/dq.
- בשלב זה מניחים שיש שני גורמי ייצור משתנים ואין הוצאות קבועות.
- הקשרים בין AC , TC ו – MC הינם הקשרים המקובלים בין כולל, ממוצע ושולי.
- התחום בו AC יורד הינו תחום של יתרונות לגודל והתחום בו הוא עולה הינו תחום של חסרונות לגודל.

ATC ו - MC



עקומת ההוצאות הממוצעות.

ה MC חותך את ה – ATC בנקודת המינימום שלה.

היחס בין MC , AC ו - AVC

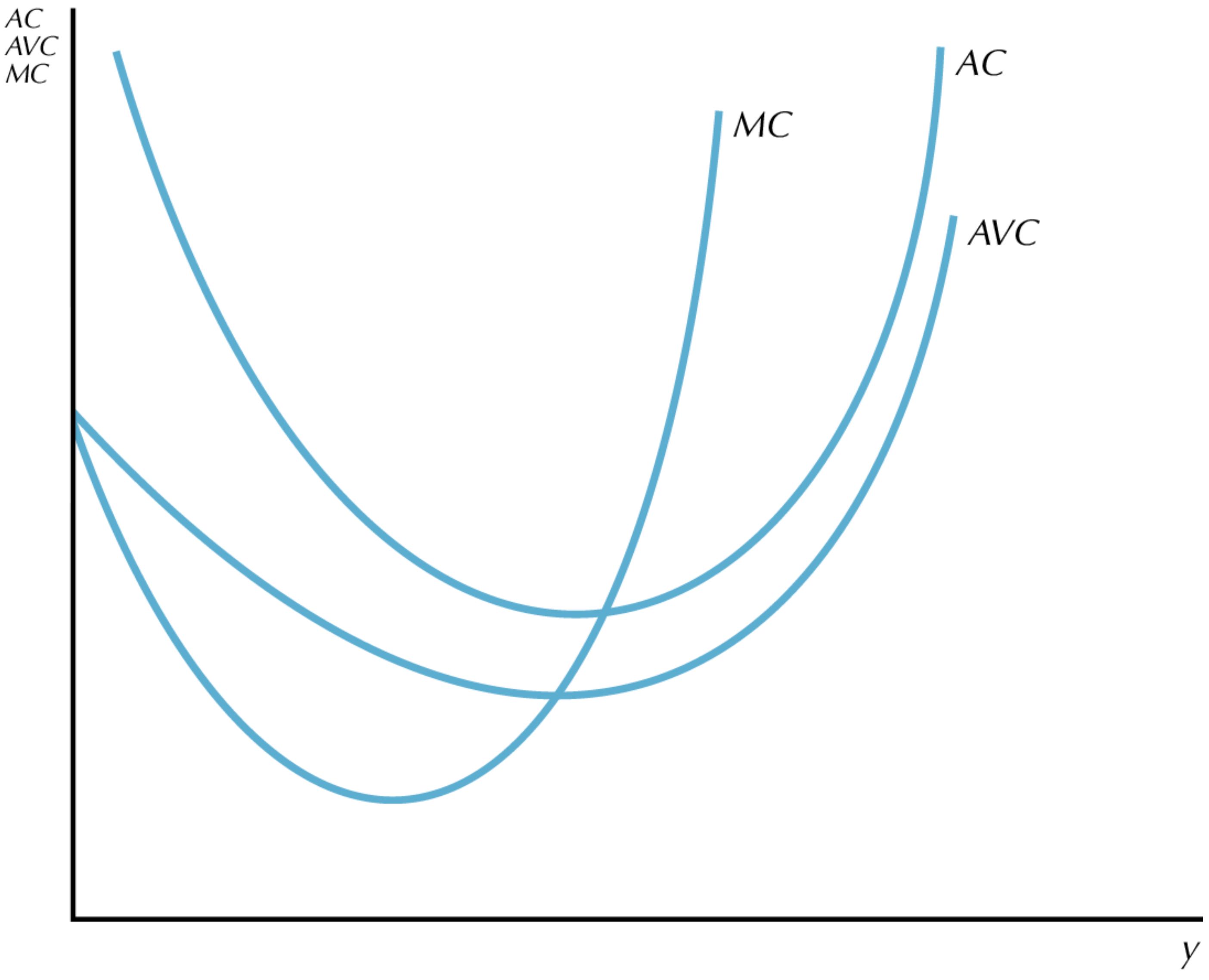


Figure 21.2 Cost curves

השטח מתחת ל MC מהווה את ההוצאה המשתנה

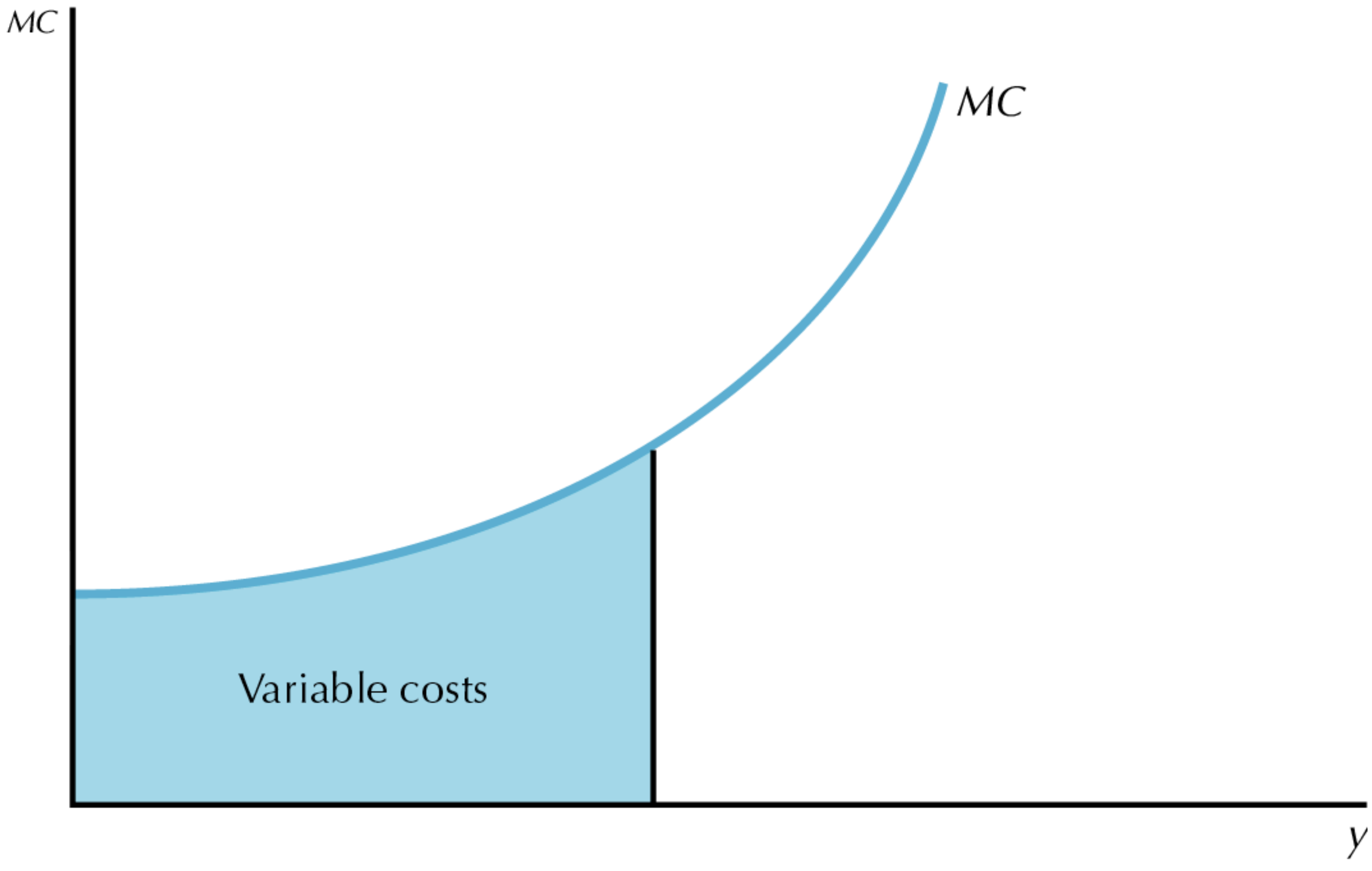


Figure 21.3 Marginal cost and variable costs

דוגמה: ($c(y) = y^2 + 1$ – הוצאה קבועה)

1. $AC = y + 1/y$
2. $AVC = y$
3. $MC = 2y$

שרטוט בשקף הבא

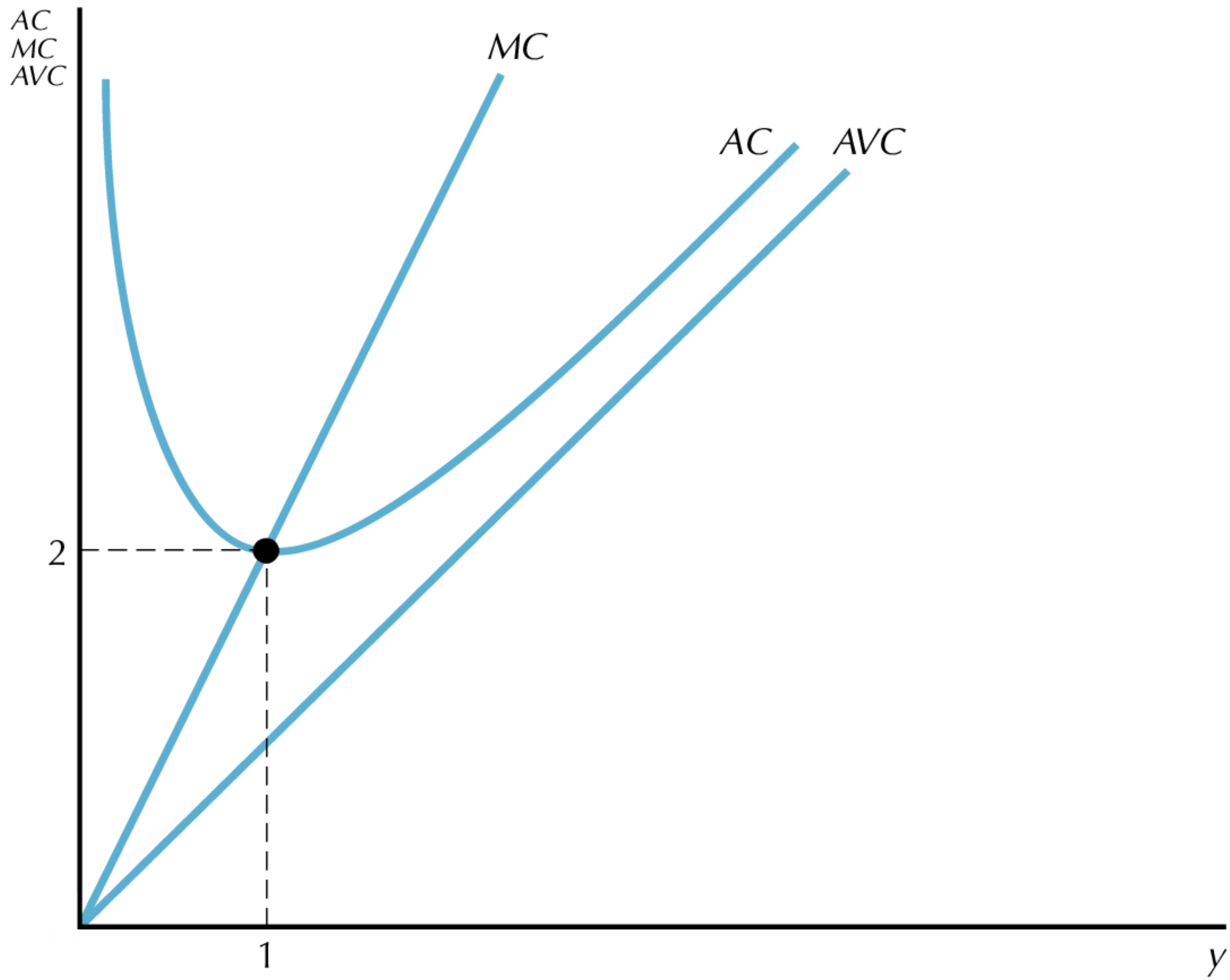


Figure 21.4 Cost ccurves

תשואה לגודל ומבנה פונקציית ההוצאות

- נניח כי פונקציית הייצור הינה הומוגנית מדרגה r.
- ההוצאה הכוללת במקרה זה (עבור מחירי גורמי ייצור קבועים) ניתנת על ידי $TC(q)=Bq^{1/r}$.
- לכן כאשר r>1 (תשואה עולה לגודל) ההוצאה הממוצעת והשולית פוחתות.
  כאשר r<1 (תשואה יורדת לגודל) ההוצאה הממוצעת והשולית עולות.
- כאשר r=1 (תשואה קבועה לגודל) ההוצאה הממוצעת שווה להוצאה השולית וקבועה.

יצרן רב - מפעלי

נניח כי פירמה המייצרת את המוצר q יכולה לבחור אם לייצר אותו

במפעל אחד או בשני מפעלים.

פונקציית ההוצאות של כל מפעל ניתנת על ידי:

$C(q)=q^2+A \quad q>0$ ואפס אחרת.

(פונקציה זו "ככל הנראה" התקבלה כתוצאה ממינימיזציה של הוצאות בהינתן מחירים (קבועים) של גורמי ייצור ופונקציית הייצור של מפעל בודד. ניתן לחשוב על A כעלות להפעלת מפעל, למשל רישיון שצריך לשלם במידה ומייצרים כמות חיובית במפעל.

מהי פונקציית ההוצאות של הפירמה, וכיצד מחליטה הפירמה על מספר המפעלים המייצרים וחלוקת התפוקה ביניהם?

יצרן רב מפעלי - 1

עבור כל רמת תפוקה צריכה הפירמה להחליט האם להשתמש במפעל אחד או שניים.

במידה ומשתמשים במפעל אחד פונקציית ההוצאות ניתנת על ידי: $C(q)=q^2+A$

במידה ומשתמשים בשני מפעלים, פונקציית ההוצאות מתקבלת מפתרון הבעיה:

$$\text{Min } C(q_1)+C(q_2)$$
$$\text{S.T. } q_1+q_2=q$$

מבעיה זו (אם באמצעות לאגראנג'יאן, או הצבה פשוטה) מתקבל כי יש לחלק את התפוקה בין שני המפעלים באופן שהעלות השולית תהיה זהה בשני המפעלים.

מכיוון שהמפעלים זהים יש לכן לייצר כמות שווה בכל מפעל כלומר $q_1=q_2=q/2$.

פונקציית ההוצאות הינה לכן:

$$(q/2)^2+A+(q/2)^2+A=q^2/2+2A$$

ההחלטה האם להפעיל מפעל אחד או שניים נקבעת על ידי השוואת העלויות בין שני המקרים. כלומר עבור אותן רמות q המקיימות $q^2/2+2A>q^2+A$ נפעיל מפעל אחד

בעוד שעבור רמות q המקיימות את אי השיוויון ההפוך נפעיל שני מפעלים.

יצרן רב מפעלי - 2

$$C(q) = \begin{cases} q^2 + A & q < (2A)^{0.5} \\ q^2/2 + 2A & q \ge (2A)^{0.5} \end{cases}$$

$$AC(q) = \begin{cases} q + A/q & q < (2A)^{0.5} \\ q/2 + 2A/q & q \ge (2A)^{0.5} \end{cases}$$

$$MC(q) = \begin{cases} 2q & q < (2A)^{0.5} \\ q & q \ge (2A)^{0.5} \end{cases}$$

עקומות ההוצאות וההוצאות הממוצעות אינן
"קופצות" ומהוות מעטפת תחתונה לעקומות עבור
מפעל אחד ועבור שני מפעלים. עקומת ההוצאות
השוליות "קופצת".

ההצגה הגראפית עבור מקרה זה הינה ...

הצגה גראפית של מספר מפעלים – AC בטווח הקצר והארוך

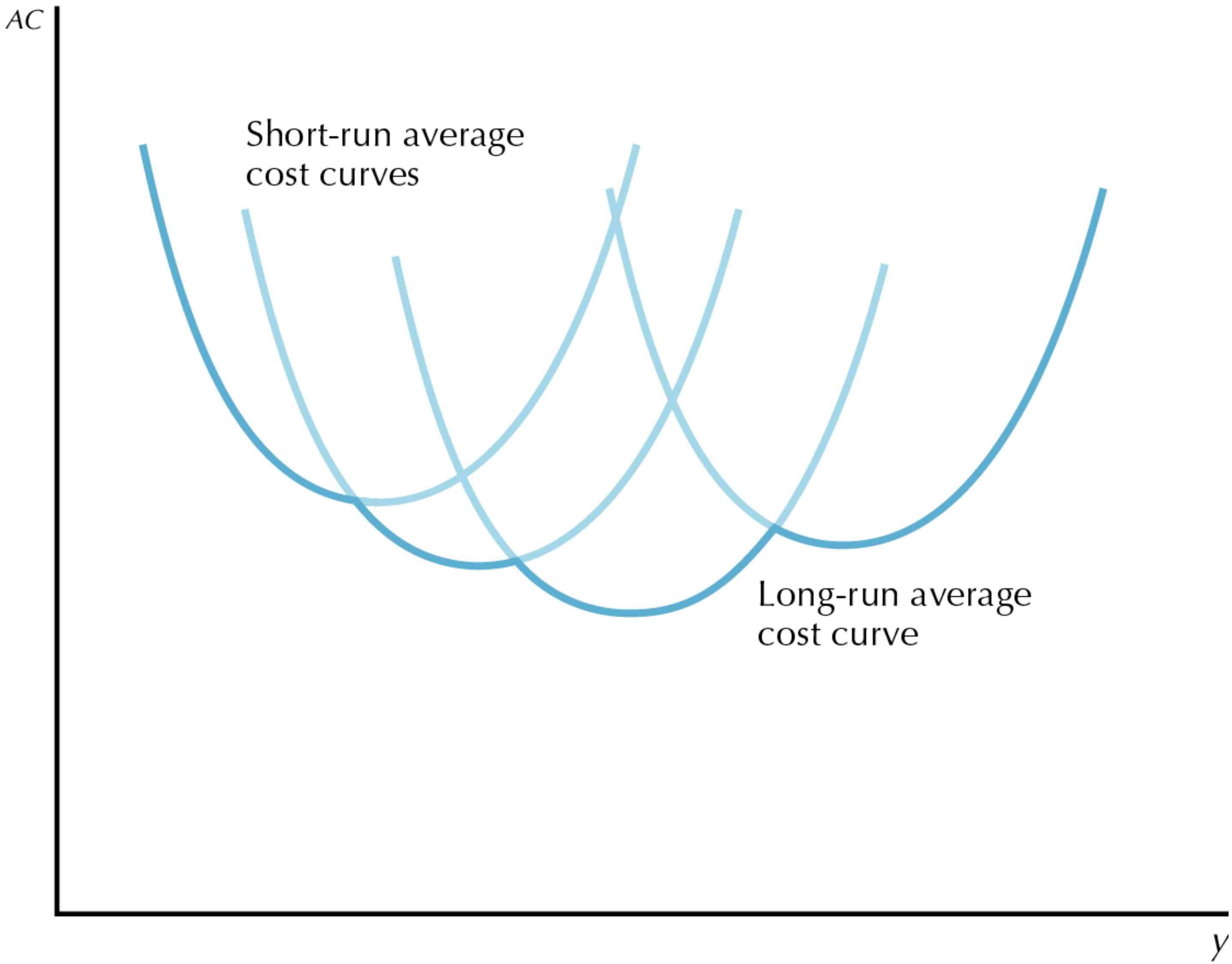


Figure 21.8 Discrete levels of plant size

הצגה גראפית של מספר מפעלים – MC בטווח הקצר והארוך

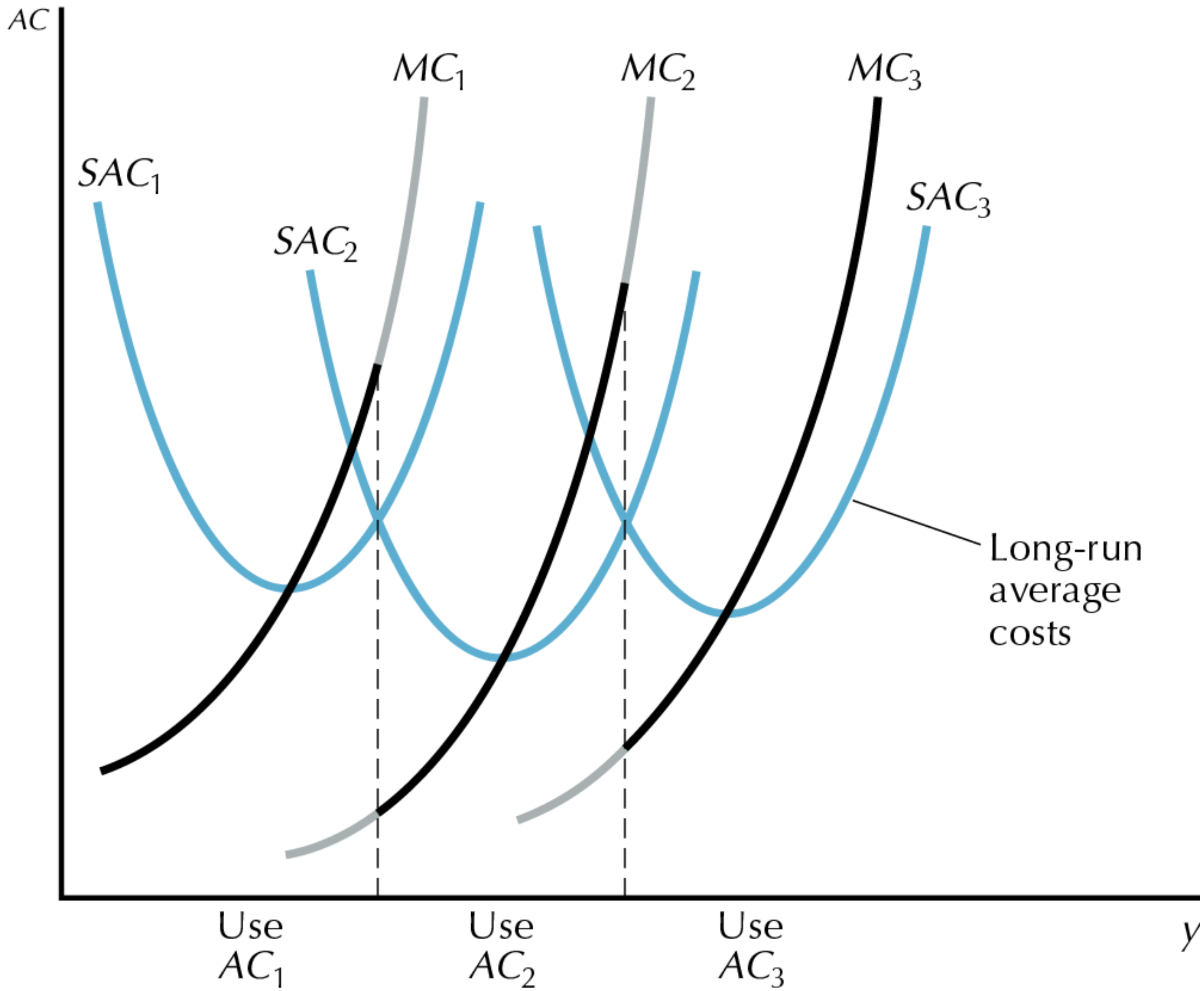


Figure 21.9 Long-run marginal costs

יצרן רב מפעלי - 3

נניח עתה שהיצרן רב מפעלי יכול להקים כל מספר מפעלים שירצה. נניח שהמפעלים הם עם פונקציית הוצאות $C(q)$ למפעל ועלות הקמה של מפעל היא A. נפתור את הבעיה ראשית תוך התעלמות ממגבלת השלמים.

נשים לב שאם על מנת לייצר תפוקה q מקימים n מפעלים, פונקציית ההוצאות ניתנת על ידי:

$$nC(q/n)+nA$$

מאחר שאם יש n מפעלים הם ייצרו כמות זהה בכל אחד מהם.

על מנת לייצר במינימום עלות כל תפוקה יש לפתור לכן את הבעיה הבאה:

$$\min_{n} nC(q/n)+nA$$

פתרון זה ייתן את מספר המפעלים שיש להקים ואת הגדלות.

התנאי מסדר ראשון מתקבל על ידי גזירה לפי n והינו:

$$C(q/n)-(q/n)C'(q/n)+A=0$$

התנאי הגורר שהכמות המיוצרת בכל מפעל (q/n) היא הכמות בה ההוצאה הממוצעת למפעל שווה להוצאה השולית, כלומר נקים מספר מפעלים כזה שכל מפעל יפעל במינימום AC שלו.

במידה ומגבלת השלמים מופרת של נבצע השוואה רווחים בין שני השלמים (הנמוך והגבוה).

יצרן רב מפעלי - 4

נניח כי $C(q)=q^2$ וכי העלות להקמת מפעל הינה A .

Min AC מושג בכמות $A^{0.5}$, העלות בנקודה זו הינה 2A .

לאור זאת העלות הכוללת לייצור q כשניתן לבחור את מספר המפעלים האופטימלי הינה:

$2qA^{0.5}$

היא מושגת על ידי הקמת $q/A^{0.5}$ מפעלים וייצור כמות של $A^{0.5}$ בכל מפעל.

וודאו כי פתרון ישיר מביא לתוצאה דומה.