אי וודאות – המשך
תורת היצרן – טכנולוגיה ופונק' ייצור

בעיית הביטוח – פתרון אלגברי ב "מישור העושר"

בעית המקסימיזציה של הפרט היא :

$$\underset{K}{Max}\; p_1 u(10-\gamma K+K)+p_2 u(40-\gamma K)$$

תנאי סדר ראשון מתקבל מגזירה לפי K והשוואה לאפס). נסמן ב – X_1 את' העושר במצב טבע 1 וכו'.

$$(1-\gamma)p_1 u'(X_1)-\gamma p_2 u'(X_2)=0$$

$$\frac{u'(X_1)}{u'(X_2)}=\frac{\gamma(p_2)}{(1-\gamma)p_1}$$

$$or$$

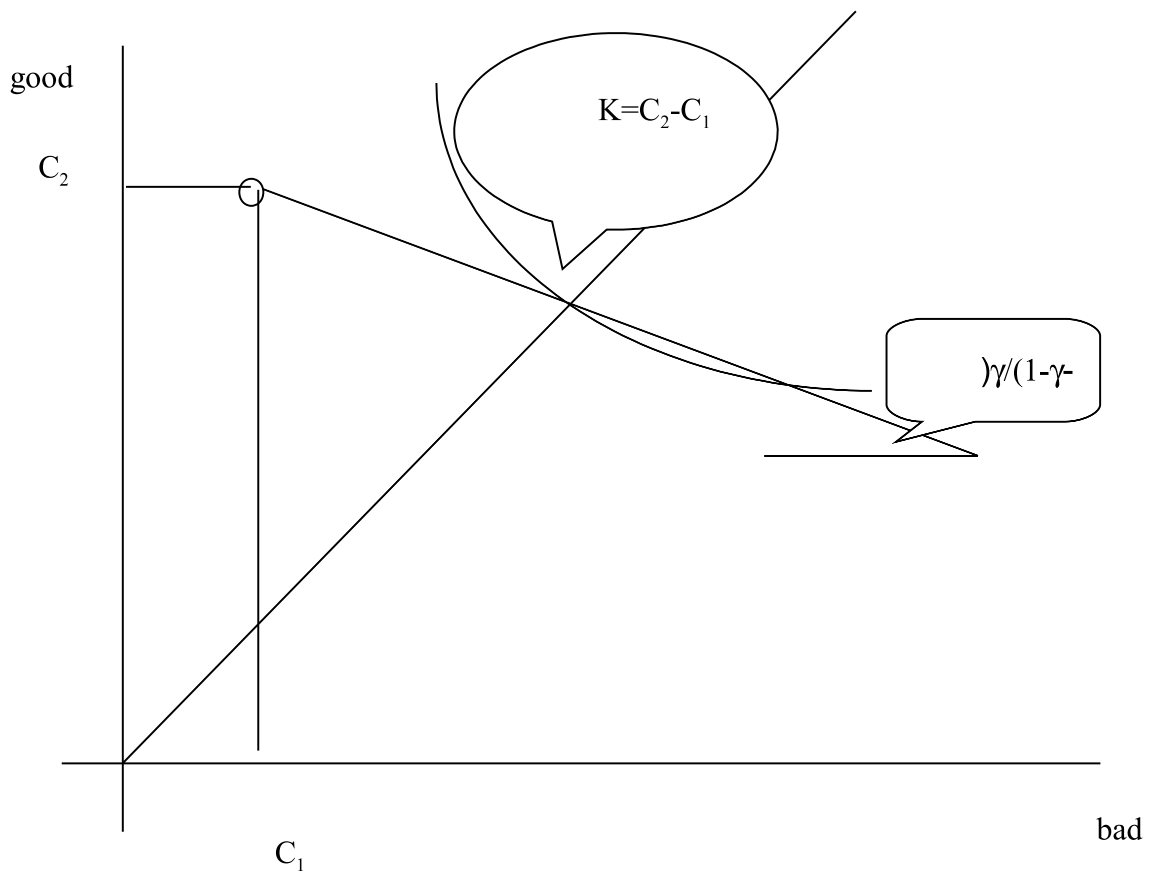
$$\frac{p_1 u'(X_1)}{p_2 u'(X_2)}=\frac{\gamma}{(1-\gamma)}$$

מכיוון ש – $p_2=1-p_1$ אנו רואים כי $\gamma=p_1$ גורר ש - $X_1=X_2$.

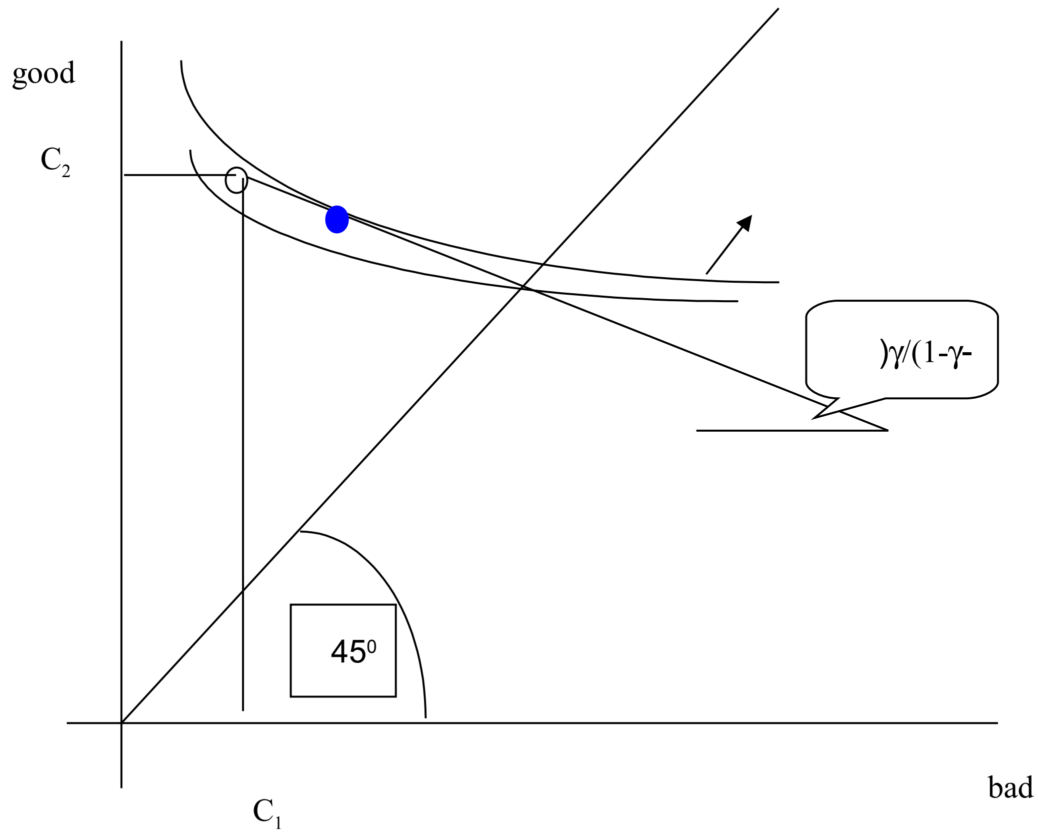
אם $\gamma<p_1$ אזי עקומת האדישות יותר תלולה מקו התקציב בנקודת החיתוך עם קו ה 45^o, ושוב קונים ביטוח מלא.

אם $\gamma>p_1$ אזי עקומת האדישות יותר שטוחה מקו התקציב בנקודת החיתוך עם קו ה 45^o, בנקודה זו קונים כיסוי חלקי. (אם γ גדול מספיק כלל לא קונה ביטוח). הנקודה המאפשרת MRS בנק' ה – C קטן מ $\frac{\gamma}{(1-\gamma)}$.

הבחירה האופטימאלית במקרה של פרמייה "יותר מ – הוגנת"



הבחירה האופטימאלית במקרה של פרמייה שאינה הוגנת



דוגמה מספרית

מצב המוצא הינו :

$$(10{,}000\ ,\ 40{,}000\ ;\ 0.01\ ,0.99\ )$$

פונקצית התועלת VNM של הפרט הינה Ln (X) .

נקודת המוצא במישור התצרוכת הינה
(10,000,40,000)

התועלת של הפרט מכל צרוף תצרוכת הינה

$$0.01 * Ln(X_1) + 0.99 * Ln(X_2)$$

שיפוע עקומת האדישות בכל נקודה

(ה – MRS) נתון על ידי : $\frac{0.01\, X_2}{0.99\, X_1}$.

קו התקציב של הפרט נתון על ידי :

$$(X_2 - 40{,}000\ ) = -\frac{\gamma}{1-\gamma}(X_1 - 10{,}000\ )$$

or

$$\frac{\gamma}{1-\chi}X_1 + X_2 = \frac{\gamma}{1-\gamma}10{,}000\ + 40{,}000$$

דוגמה מספרית - 1

לכן פתרון בעיית התיק נתון על ידי פתרון שתי

משוואות אלו:

$$\frac{0.01\,X_2}{0.99\,X_1} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \quad \text{תנאי השקה}$$

ומגבלת תקציב

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} X_1 + X_2 = \frac{\gamma}{1-\gamma} 10{,}000 + 40{,}000$$

שנותן:

$$X_2 = 0.99\left(40000 + \frac{\gamma}{1-\gamma} 10000\right)$$

$$X_1 = 0.01\,\frac{40000 + \frac{\gamma}{1-\gamma} 10000}{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 100 + 400\,\frac{1-\gamma}{\gamma}$$

נוסחאות אלו מגדירות קו של (X_1,X_2) בקצב בין

$(10{,}000\ ,40{,}000)$ והמשיק שיפועו $-\ 45^{o}$.

דוגמה מספרית - 2

הצבת $\gamma=0.01$ גוררת תצרוכת בכל מצב שווה ל
39,700 מכאן מתקבל $K=30,000$.

כלומר הפרט רוכש ביטוח מלא.

תועלתו נתונה על ידי $Ln(39700) = 10.5891$

אם $\gamma=0.02$ ביטוח שאינו הוגן, מתקבל כי

$X_1=19700 \quad X_2=39802.04082$

מכאן $K=50(40000-39802.0408)=9897.959$

ותועלתו נתונה על ידי 10.5846.

אם מתקיים
$\gamma/(1-\gamma)=(0.01/0.99)*40000/10000$

אזי הפרט לא יקנה ביטוח.
זה קורה עבור $\gamma=0.0388$

עבור כל γ גדול יותר הוא ואזי לא יקנה ביטוח.

השקעה בנכס לא וודאי

לפרט שרמת עושרו W ... ויש לו אפשרות להשקיע X בנכס מסוכן.

הנכס נותן תשואה r_1 במצב רע (בהסתברות p_1) ותשואה r_2 במצב טוב (בהסתברות p_2).

$$r_1 < 0 < r_2$$

לכן אם הפרט משקיע X עושרו במצב 1 יהיה:

$$W - X + X(1 + r_1) = W + r_1 X$$

ועושרו במצב 2 יהיה:

$$W + r_2 X$$

התוחלת של תועלת הפרט ממה שישקיע X נתונה על ידי:

$$P_1 u(W + r_1 X) + p_2 u(W + r_2 X)$$

הפרט בוחר X שממקסם ... תנאי סדר ראשון יהיה:

$$P_1 r_1 u'(W + r_1 X) + p_2 r_2 u'(W + r_2 X) = 0$$

השקעה בנכס לא וודאי - 1

האם ניתן לקבוע בוודאות מתי הפרט ישקיע בנכס ?

התשובה לכך תלויה בנגזרת של פונקציית המטרה בנקודה X=0 .

אם היא חיובית ממש הפרט ישקיע כמות חיובית בנכס .

אם היא אי חיובית הוא יבחר לא להשקיע בנכס .

מהי נגזרת זו ? הנגזרת היא :

$$P_1 r_1 u'(W)+p_2 r_2 u'(W)=u'(w)(p_1 r_1+p_2 r_2)$$

כלומר היא חיובית אמ"מ לנכס יש תשואה חיובית .

מסקנה : הפרט ישקיע כמות חיובית בנכס עם תשואה חיובית.

מחירו ה"מקסימלי" של נכס מסוכן

נתון נכס שבהסתברות 0.9 יהיה שווה 500,
ובהסתברות 0.1 יהיה שווה 0.
כלומר נתונה הגרלה (0.1,0.9; 0,500)

קיים נכס חסר סיכון שתשואתו היא 4%.

לפרט שרכושו W ופונקציית תועלת VNM, U.

מהו המחיר המקסימלי q שהפרט יהיה מוכן לשלם
תמורת הנכס המסוכן? (שימו לב שהתשובה תלויה
ב-W, ב-U, אך אפשר לקבל חסמים)

מחיר מקסימלי זה מקיים:

$$U(1.04W) = 0.9U(1.04(W-q)+500) + 0.1U(1.04(W-q))$$

שימו לב שאם הנכס היה שווה 500 בוודאות, מחירו
המקסימלי היה $500/1.04$.

שימו לב שאם הפרט אדיש לסיכון q מקיים:

$$1.04W = 1.04W + 0.9*500 - 1.04q$$

כלומר:

$500/q = 1.04/0.9 = 1.155$ או $q = 432.71$

מחירו ה"מקסימאלי" של נכס מסוכן - 1

פרט שונא סיכון ירצה תשואה גדולה יותר מזו של
פרט אדיש לסיכון .
הגודל המדוייק תלוי בהעדפותיו .

נניח שהעדפותיו ניתנות על ידי פונקציית תועלת
VNM , $W^{0.5}$.

נפתור את המשוואה :

$$(1.04W)^{0.5} = 0.9(1.04(W-q)+500)^{0.5} + 0.1(1.04(W-q))^{0.5}$$

כאשר $W=1,000$ נקבל :

$q=426.1595 \quad r=500/q=1.173$

כאשר $W=1,200$ נקבל :

$q=427.4835$

כאשר $W=1,000$ והעדפות הן $W^{0.25}$ נקבל :

$q=422.53$

כאשר $W=1,000$ והעדפות הן Ln נקבל :

$q=418.65$

הסבר לתוצאות אלו נובע משינויים בשנאת הסיכון .
כאשר הרכוש עולה שנאת הסיכון יורדת .
כאשר פונקציית התועלת נעשית יותר קעורה , שנאת הסיכון עולה.

תורת היצרן

- תורת היצרן
  - טכנולוגיות, פונקציות ייצור
  - מינימום הוצאות, פונקציית ההוצאות, פונקציות הביקוש המותנות
  - התנהגות תחרותית, מקסום רווחים, פונקציות ביקוש (לגורמי ייצור) והיצע (של תפוקות)
  - ביקושים והיצעים ענפיים
- שיווי משקל ענפי
  - טווח קצר, טווח ארוך

עברנו יותר מחצי סמסטר והחלק הקשה עוד לפנינו סתם ...

- **היום נכסה**
  - **טכנולוגיה**
  - **פונקציית ייצור**
  - **מקסום תפוקה**

טכנולוגיה

- כיצד נתאר את הטכנולוגיה
- באופן כללי ביותר הטכנולוגיה היא האמצעי להפוך תשומות (גורמי ייצור) לתפוקות (מוצרים).
- בדרך כלל נניח שיש m גורמי ייצור מסומנים ב – $z_1, z_2, \ldots z_m$ ותפוקה אחת המסומנת ב – q.
- פונקציית הייצור מתארת, עבור כל צירוף גורמי ייצור את הכמות המקסימאלית של תפוקה אותה ניתן להשיג באמצעות צירוף זה.

דוגמאות

- $F(z_1,z_2)=z_1^{0.5}z_2^{0.3}$
- $F(z_1,z_2)=2z_1+3z_2$
- $F(z_1,z_2)=\min(z_1/3,z_2/2)$
- $F(z_1,z_2)=z_1^2+z_2^2$
- התפוקה השולית של גורם ייצור i ניתנת על ידי הנגזרת החלקית של פונקציית הייצור לפי i ומסומנת ב – Mp_i.
- לעיתים במקרה של שני גורמי ייצור נשתמש ב K (הון) ו – L (עבודה).

תוכניות ייצור אפשריות

הקשר הבסיסי בין תשומות ותפוקה

- תפוקה אחת ומספר תשומות

פונקציית הייצור

$$q \le F\,(z_1,\, z_2,\, \ldots,z_m\,)$$

ניתן לכתיבה בצורה יותר קומפקטית כ -

וקטור התשומות

$$q \;\le \mathrm{F}\,(\mathbf{z})$$

- אנו כותבים ≤ ולא =, ניתן "להשליך" תשומות.
- מהי המשמעות של F?

- F מתארת את כמות התפוקה המקסימאלית שניתן לייצר עבור כל צירוף של גורמי ייצור.

נבדיל בין 2 מקרים

יעילות טכנולוגית

- *המקרה של **ייצור יעיל** מבחינה טכנולוגית*
- מקרה 1:

$$q = F(\mathbf{z})$$

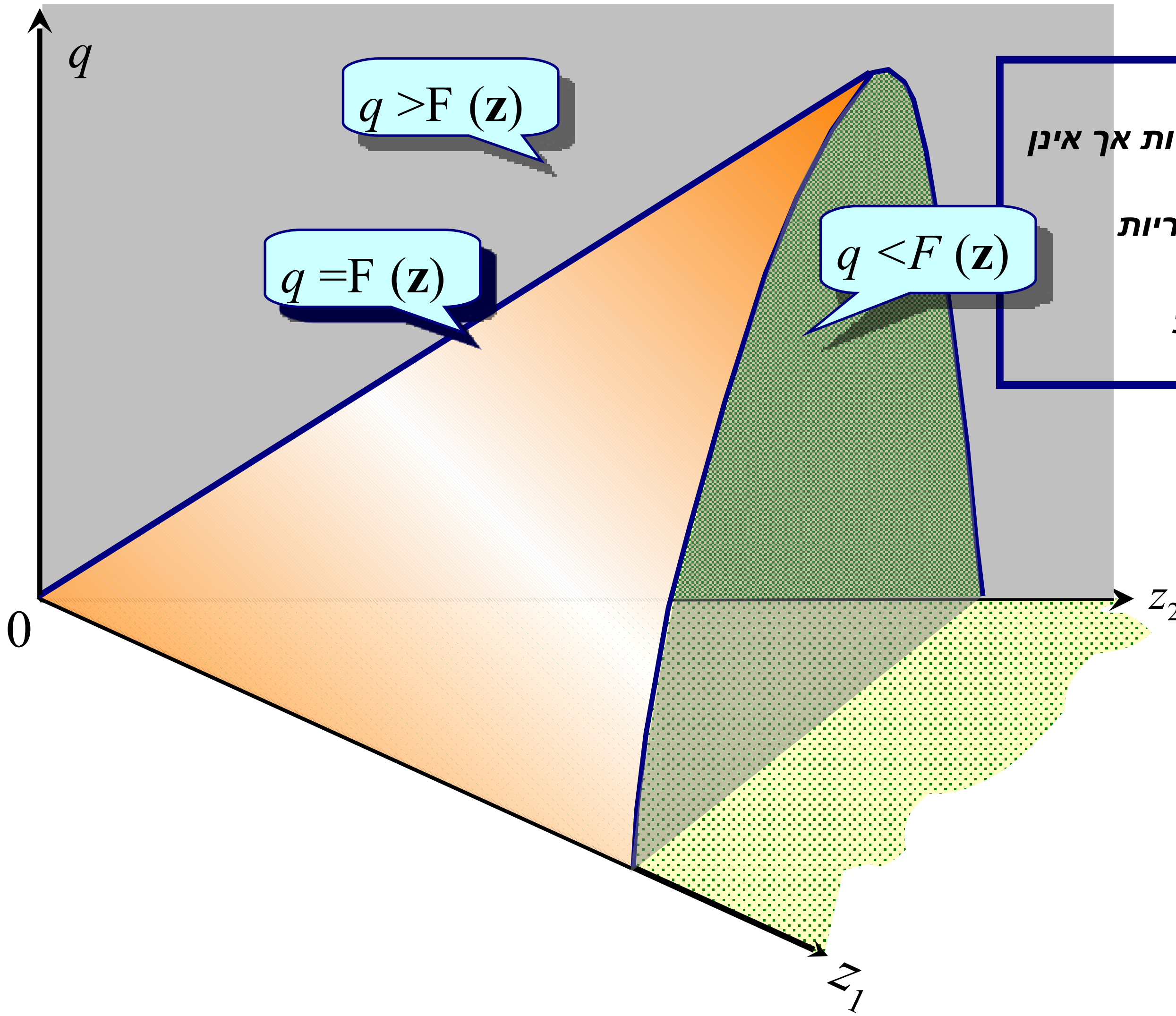
- *המקרה של **ייצור בלתי יעיל** מבחינה טכנולוגית*
- מקרה 2:

$$q < F(\mathbf{z})$$

הצירוף (q,z) אינו יעיל אם ניתן להשליך חלק מהתשומות ולייצר אותה רמת תפוקה.

הפונקצייה F

- פונקציית הייצור
- ונקודות פנימיות אפשריות אך אינן יעילות
- נקודות שפה הינן אפשריות ויעילות
- נקודות בלתי אפשריות



אוסף התשומות הנדרש לייצור תפוקה נתונה

- בחרו רמת תפוקה q
- *מצאו וקטור תשומות z שמסוגל לייצר אותה*
  - *זכרו כי חייב להתקיים* $(q \le F(z))$
- *חזרו על פעולה זו וחשבו את כל הוקטורים האלו*
- כך מתקבל אוסף התשומות הנדרש

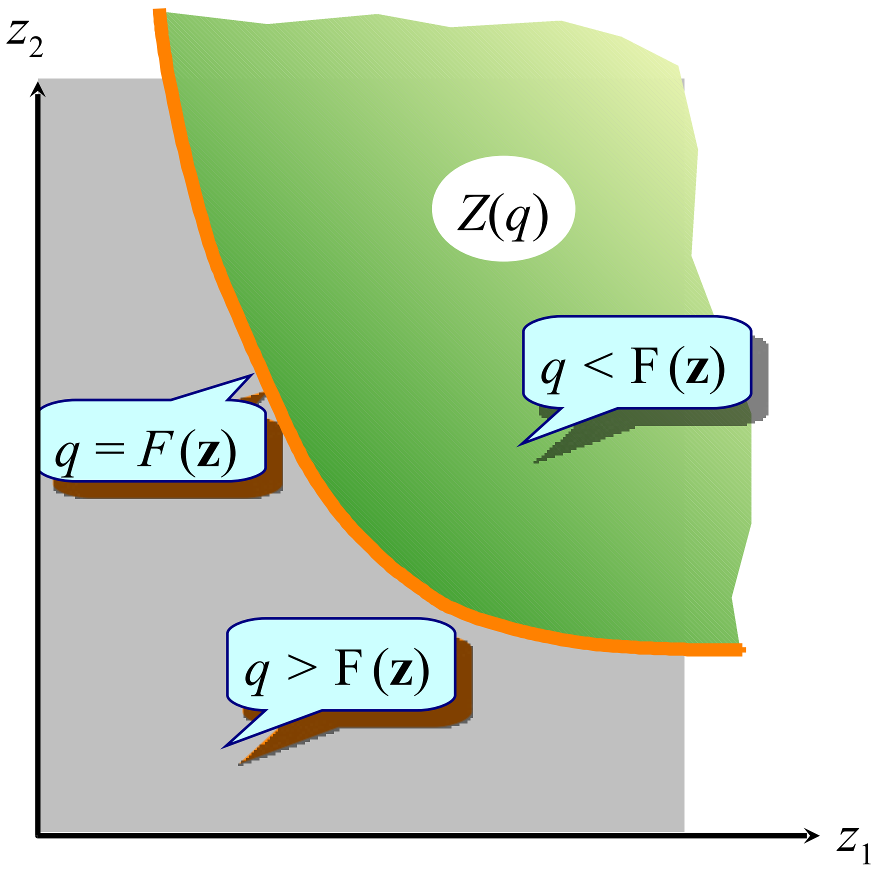
$$Z(q) := \{\mathbf{z}:\mathrm{F}\,(\mathbf{z}) \ge q\}$$

- *הצורה של Z תלוייה בהנחות לגבי הטכנולוגיה*
- נבחן ארבעה מקרים

ראשית המקרה "הטיפוסי"

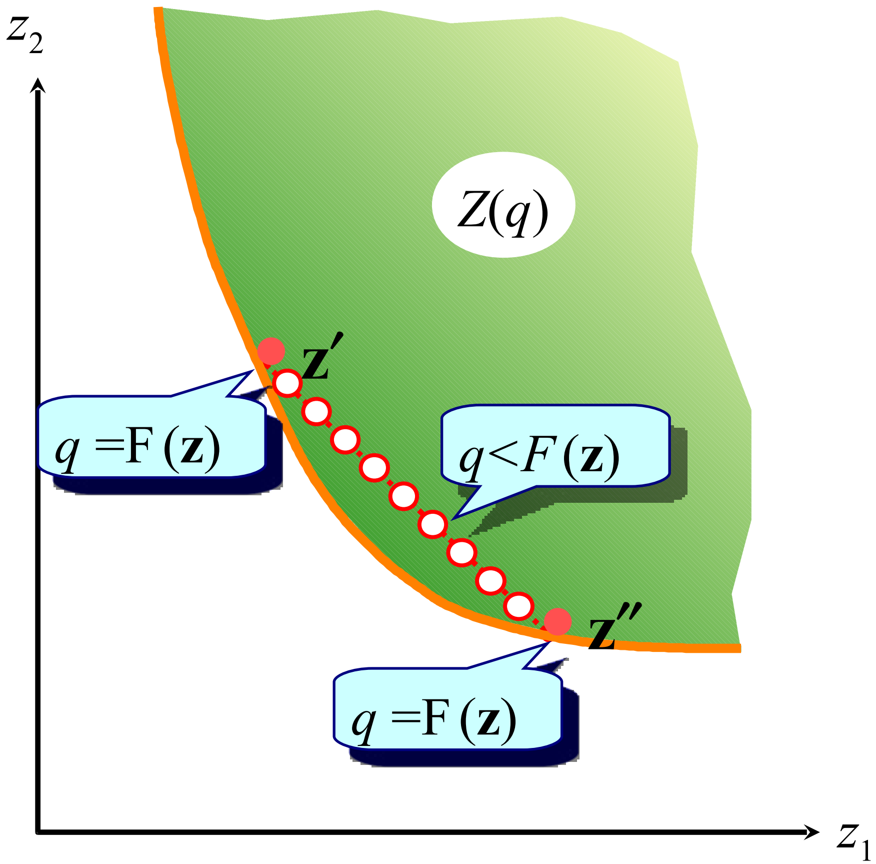
אוסף התשומות הנדרש לייצור תפוקה נתונה

- אפשרי ולא יעיל
- אפשרי ויעיל
- לא אפשרי



מקרה 1: Z מתנהגת ממש יפה (קמורה ממש וחלקה)

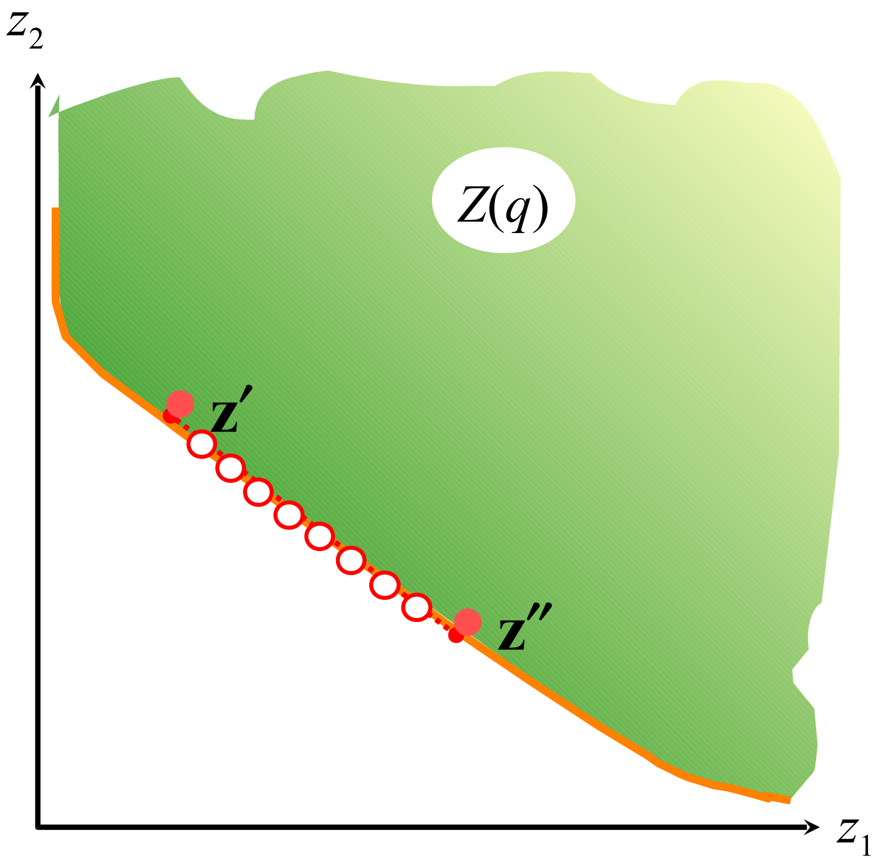
- ***בחרו שתי נקודות על השפה***
- ***שרטטו את הקו המחבר אותן***
- ***הקו נמצא בתוך Z.***



- *שילוב של שתי תכניות ייצור עשוי לייצר תפוקה גבוהה יותר.*

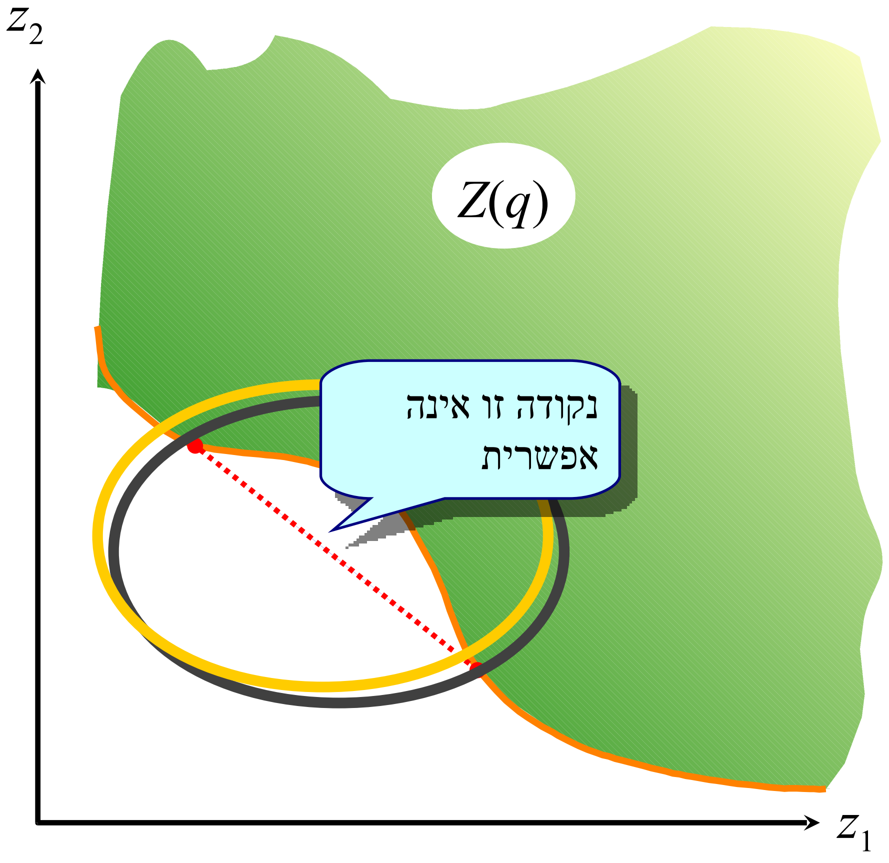
מקרה 2: Z מתנהגת יפה "אבל לא ממש"

- בחרו שתי נקודות על השפה
- שרטטו את הקו המחבר אותן
- הקו נמצא אף הוא על השפה



- צירוף של שתי תכניות ייצור אפשריות, אפשרי אף הוא.

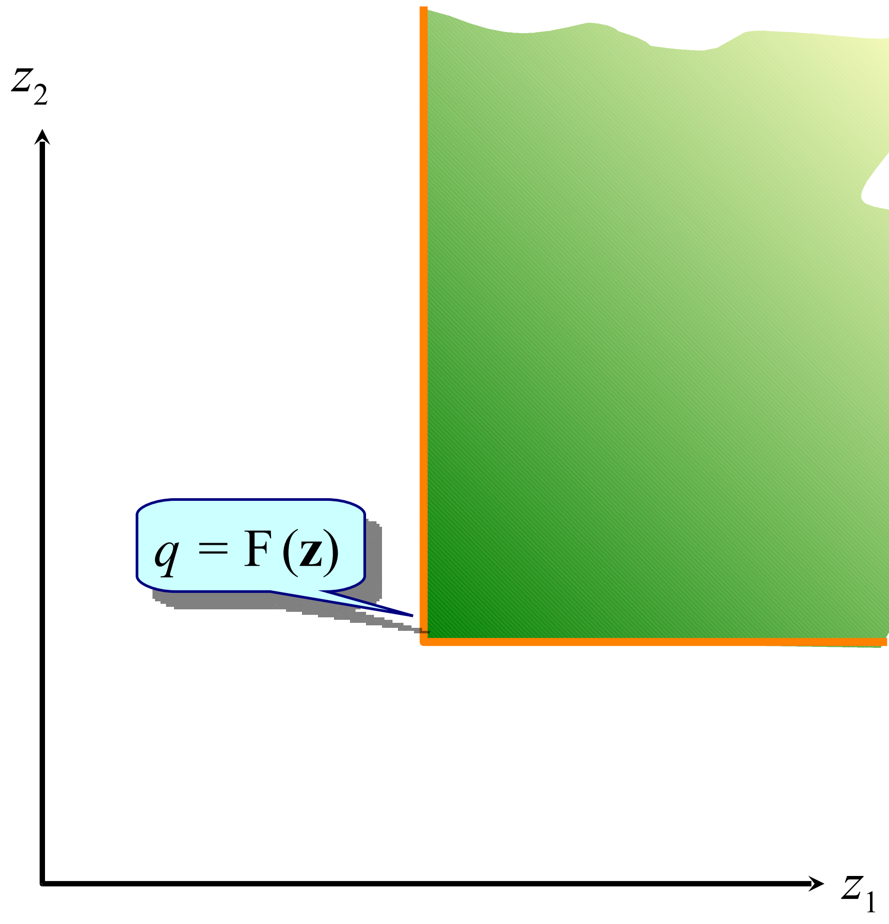
מקרה 3: Z חלקה אך אינה קמורה



- חברו שתי נקודות מצידיו של ה"שקע"
- קחו נקודה ביניהן
- הדגישו את האזור בו מתרחשת תופעה זו

- באיזור זה אין "חלוקתיות"

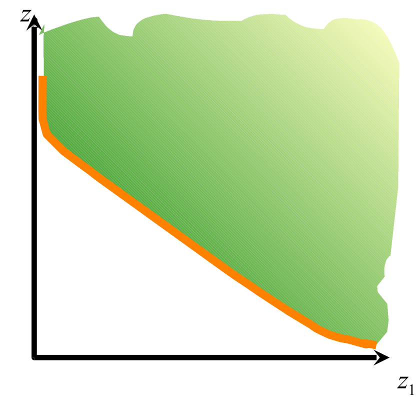
מקרה 4: Z קמורה ולא חלקה



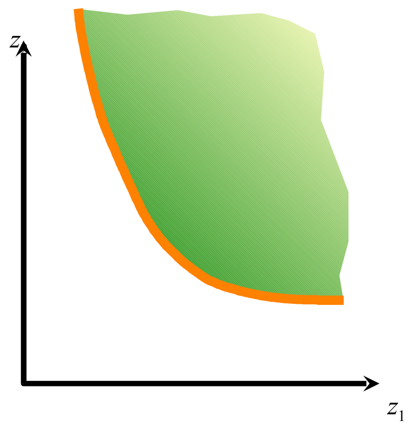
- השיפוע בנקודה זו אינו מוגדר.

חזרה: ארבעת התרחישים

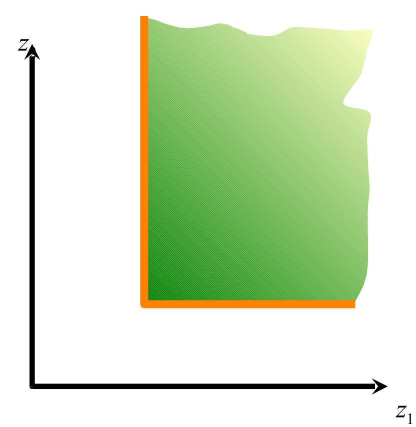
המקרה ה "כמעט
טיפוסי"



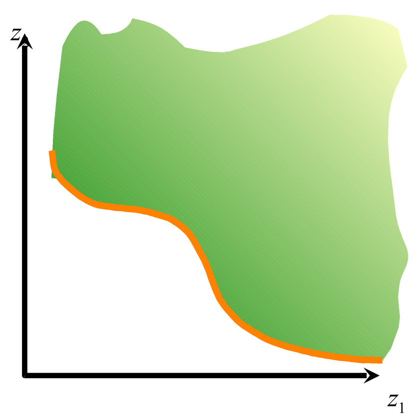
המקרה הטיפוסי



המקרה הלא חלק



המקרה
הבעייתי



עקומות שוות תפוקה

- בהינתן רמה של q
- *חשבו את* $Z(q)$
- העקומה שוות תפוקה המתאימה ל q הינה השפה של $\{ Z.\{ \mathbf{z} : \mathrm{F}(\mathbf{z}) = q$

- השיפוע של העקומה שוות התפוקה הינו שיעור התחלופה הטכנולוגי בייצור TRS_{21} וניתן על ידי

$$\frac{F_j(\mathbf{z})}{F_i(\mathbf{z})}$$

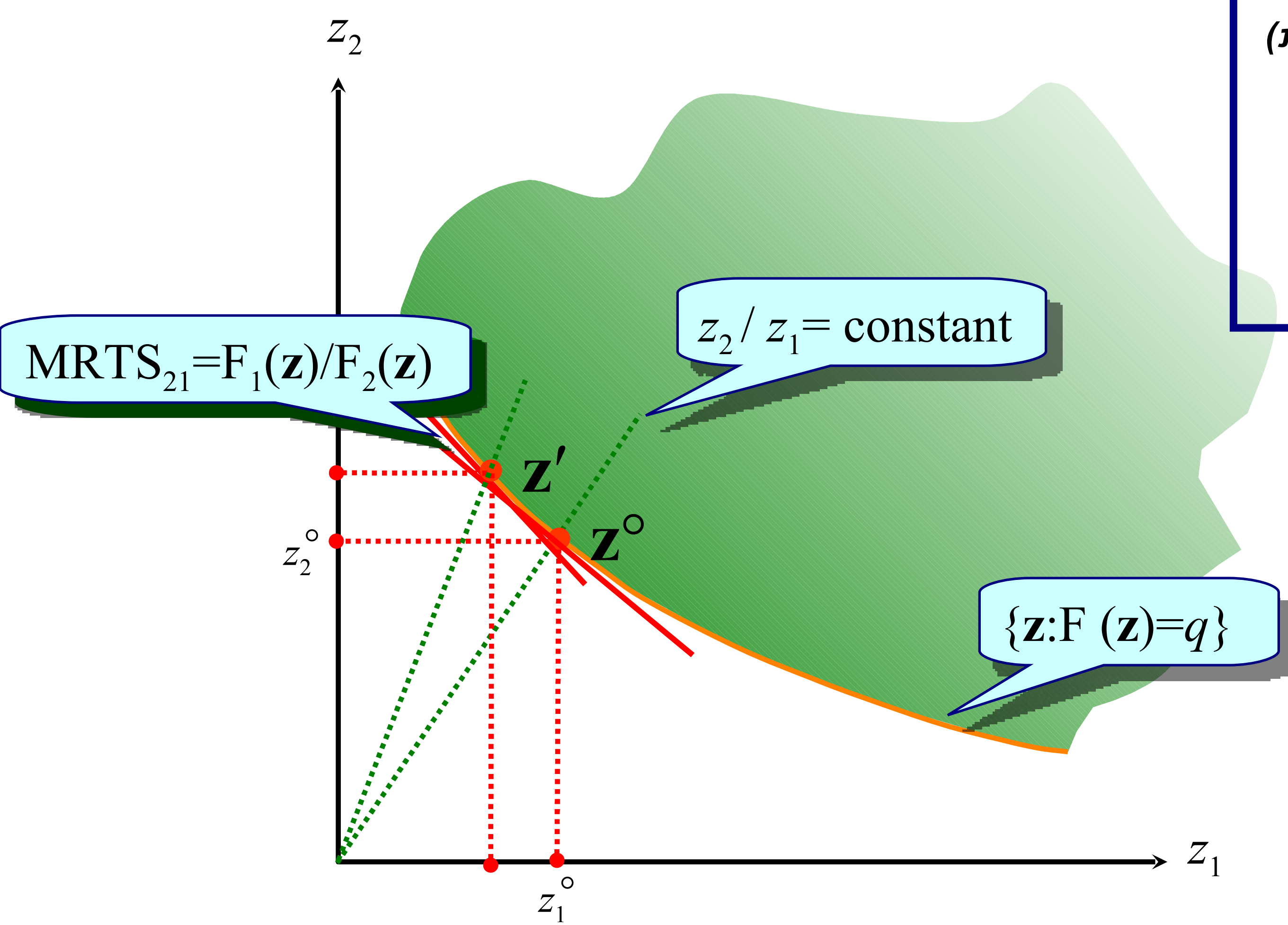
$$F_i(\mathbf{z}) := \frac{\partial \mathrm{F}(\mathbf{z})}{\partial z_i}.$$

- נותן את הקצב שבו צריך להגדיל את גורם ייצור 2 כשמקטינים את כמותו של גורם ייצור 1, על מנת לשמור על רמת תפוקה קבועה.

ממי צורתה של העקומה ש"ת?

עקומה שוות תפוקה, TRS ויחס גורמי ייצור

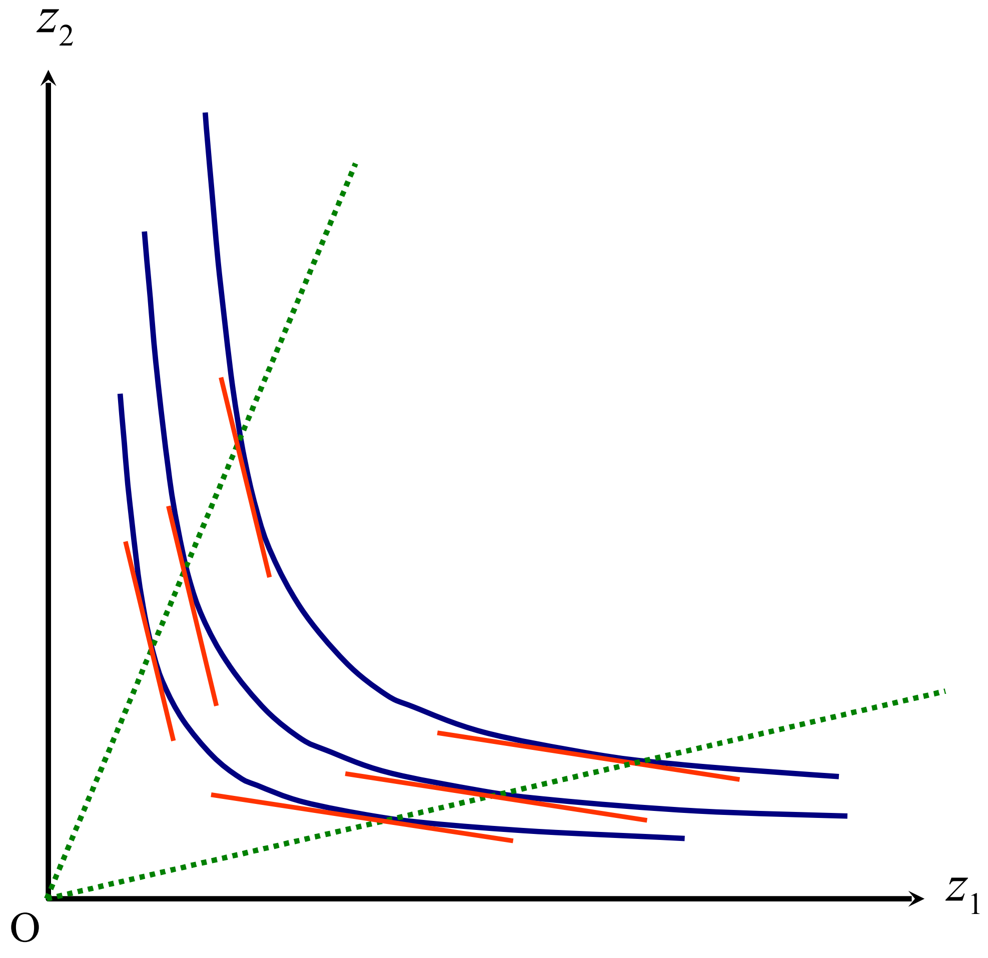
- ***הקבוצה z(q)***
- ***קו שווה רמה של F (עקומה ש"ת)***
- ***נקודה על העקומה***
- ***יחס גורמי הייצור בנקודה***
- ***ה TRS בנקודה***
- ***הגדילו את ה TRS***



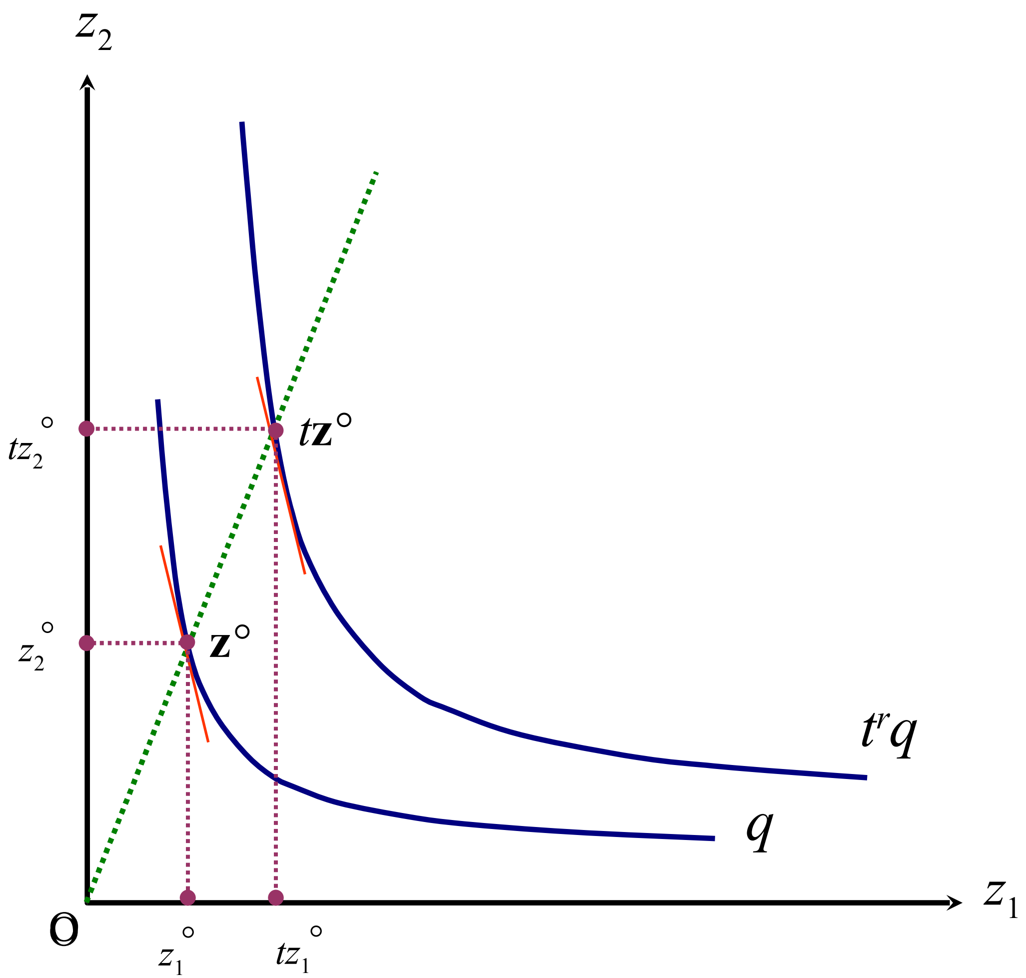
- *ה TRS הולך וגדל מימין לשמאל*

טכנולוגיה הומותטית

- העקומות שוות התפוקה
- שרטטו קרן דרך הראשית
- ה TRS קבוע לאורך כל קרן



עקומות שוות תפוקה של פונקציה הומוגנית



- ***עקומות שוות תפוקה***
- ***התשומות ב z^0***
- ***עקומה שוות תפוקה עבור תשומות מוכפלות ב t***

F הינה הומוגנית מדרגה r
אם לכל t>0 ולכל z
מתקיים

$F(t\mathbf{z}) = t^r F(\mathbf{z})$

תשואה לגודל
Returns to Scale

תשואה לגודל נקבעת לפי השינוי בתפוקה

כשמשנים את כל גורמי הייצור באותו יחס .

תשואה קבועה לגודל

$$\lambda > 0 \quad : f(\lambda z_1, ..., \lambda z_n) = \lambda f(z_1, ..., z_n)$$

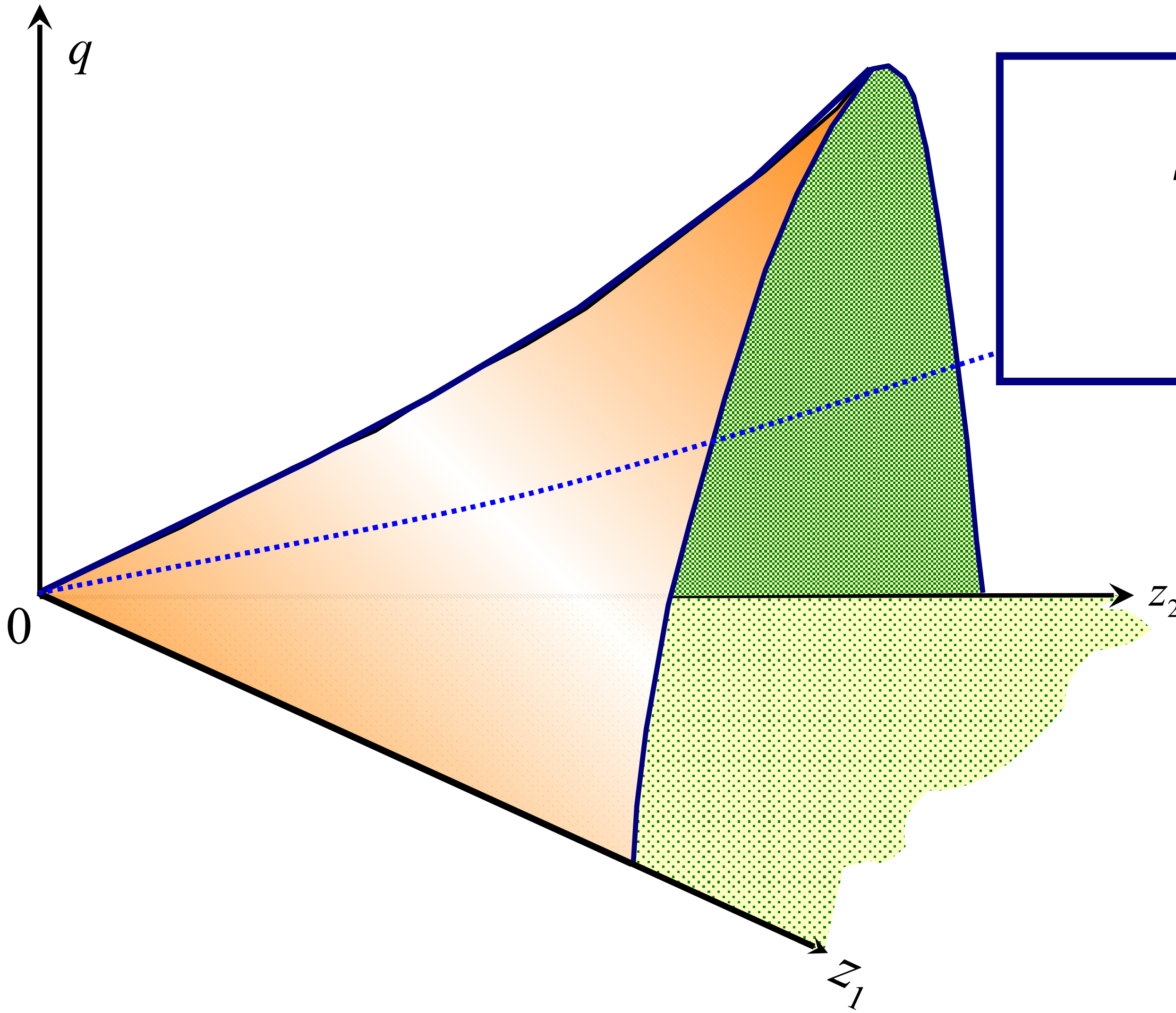
תשואה עולה לגודל

$$\lambda > 1 \quad : f(\lambda z_1, ..., \lambda z_n) > \lambda f(z_1, ..., z_n)$$

תשואה יורדת לגודל

$$\lambda > 1 \quad : f(\lambda z_1, ..., \lambda z_n) < \lambda f(z_1, ..., z_n)$$

מקרה 1 : תשואה עולה לגודל

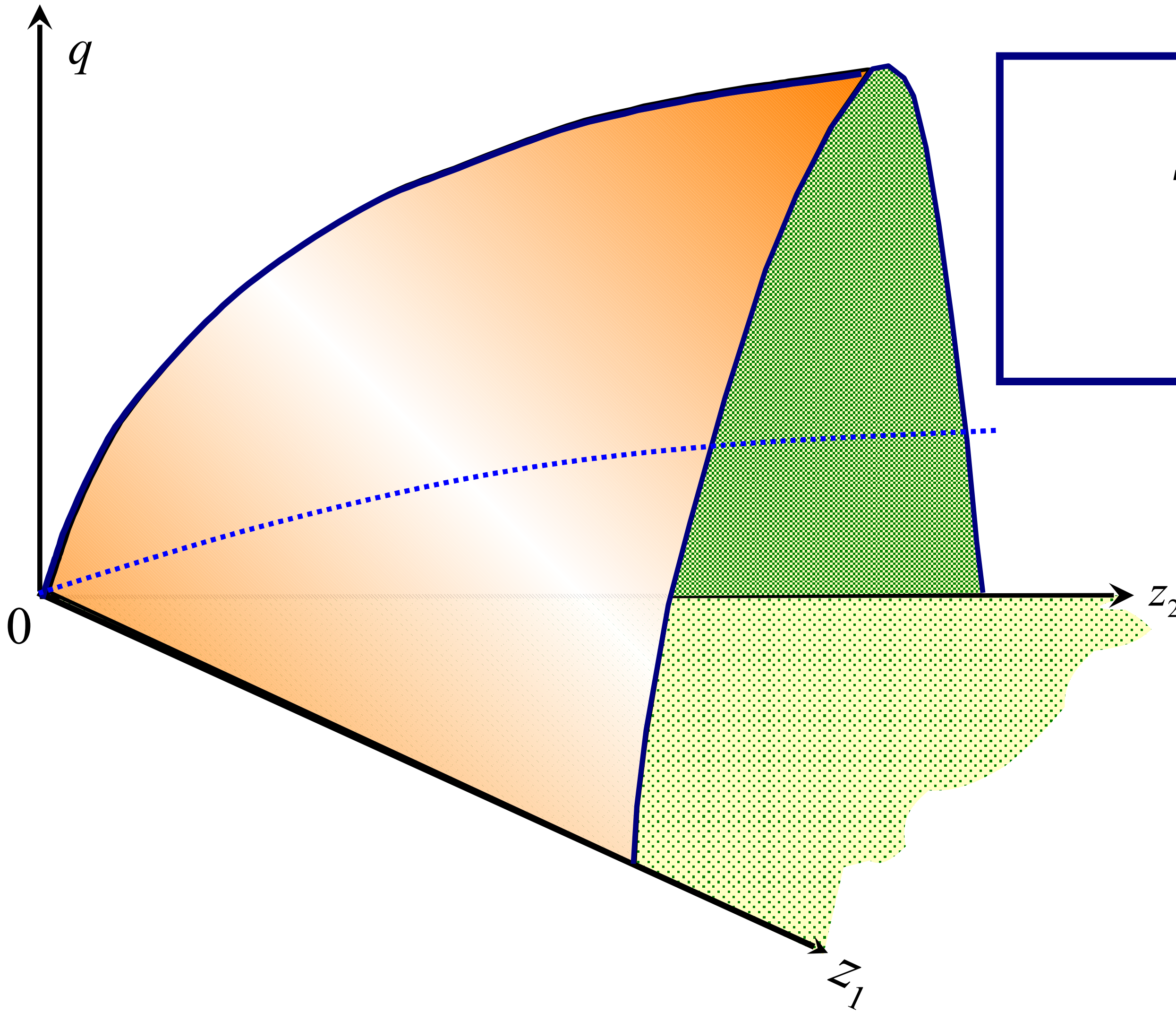


- פונקציית ייצור תע"ל
- בחר נקודת ייצור כלשהי
- קו הגידול בתוצר

$t>1$ גורר ש
$F(t\mathbf{z}) > tF(\mathbf{z})$

הכפלת התשומות
מגדילה את התוצר פי
.$\alpha>2$

מקרה 2 : תשואה יורדת לגודל

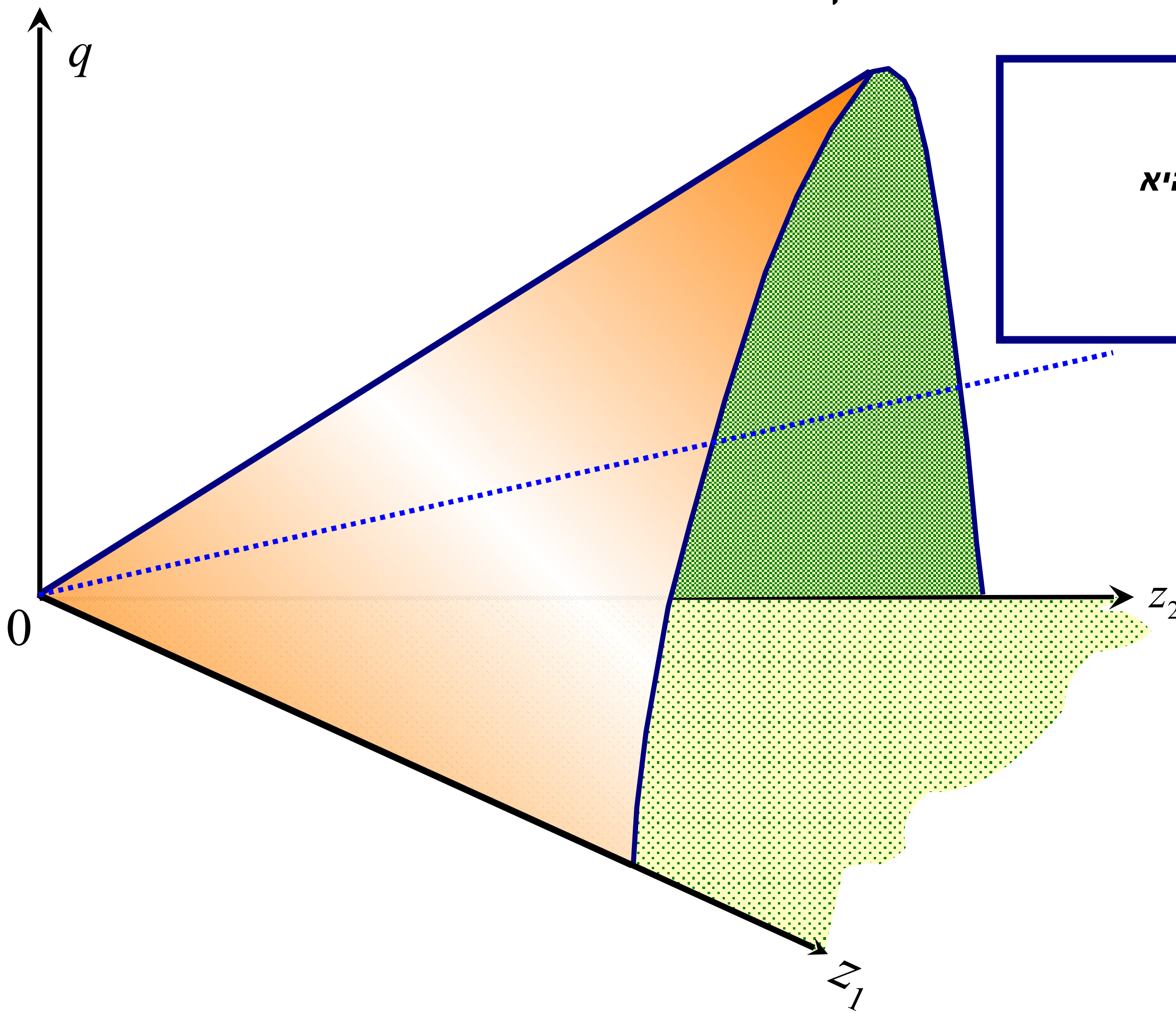


- **פונקציית ייצור תי"ל**
- **בחר נקודת ייצור כלשהי**
- **קו הגידול בתוצר**

t>1 גורר ש
$F(t\mathbf{z}) < tF(\mathbf{z})$

הכפלת התשומות גדילה את התוצר פי α<2.

מקרה 3: תשואה קבועה לגודל



- פונקציית ייצור תק"ל
- בחר נקודת ייצור כלשהיא
- התוצר גדל לאורך קרן

$$F(t\mathbf{z}) = tF(\mathbf{z})$$

הכפלת התשומות בדיוק מכפילה את התוצר

פונקצייה תק"ל - תכונות

נזכור כי פונקציה היא הומוגנית מדרגה r

אם $f(X_1,..., X_n)$

$$f(\lambda X_1,..., \lambda X_n) = \lambda^r f(X_1,..., X_n)$$

פונקצית ייצור תק"ל ה יא לכן פונקציה הומוגנית

מדרגה 1 או הומוגנית ליניארית (r=1) .

בפונקציה תק" לשל שני גורמי ייצור ה תפוקה

ה שולית של גורם ייצור תלויה רק ביחס $\frac{K}{L}$.

לכן ה - TRS קבוע לאורך קרן היוצאת מראשית

הצירים .

הוכחה ל "בית"

הוכחת הטענה עבור תפוקות שוליות

לפי הגדרת תק"ל $f(K,L)=\lambda f(\frac{K}{\lambda},\frac{L}{\lambda})$

לכן: $f(K,L)=Lf(\frac{K}{L},\frac{L}{L})=Lg(\frac{K}{L})$,

כאשר $g()$ היא פונקציה של היחס K/L

נגזור לפי K:

$$\frac{\partial f}{\partial K}=f_K=Lg'(\frac{K}{L})\frac{1}{L}=g'(\frac{K}{L})$$

נגזור לפי L

$$\frac{\partial f}{\partial L}=f_L=g\left(\frac{K}{L}\right)-Lg'\left(\frac{K}{L}\right)\frac{K}{L^2}=$$

$$g\left(\frac{K}{L}\right)-g'\left(\frac{K}{L}\right)\frac{K}{L}$$

פונקציות הומוגניות – תכונות והשלכות כלכליות

טענה

הנגזרת החלקית של פונקציה הומוגנית מדרגה r

היא הומוגנית מדרגה r-1 .

משפט אוילר :

אם ה פונקציה f הומוגנית מדרגה r אזי :

$$\sum z_i f_i = rf\ (z_1,...,\ z_n)$$

הוכחה : בפונקציה הומוגנית מדרגה r מתקיים :

$$f\,(\lambda z_1,...,\ \lambda z_m) = \lambda^r f\,(z_1,...,\ z_m)$$ גוזרים

שמאל אם כפי λ ונציב בנגזרת את $\lambda = 1$.

השלכות כלכליות

פונקציית ייצור, ... , אם ...

גורמי ייצור את המוצר ... (עבודה)

וגורם (הון), ...

המשולם .

... של ... במקרה של

תשואה (כמו במשל $Y = KL$) ו ... תשואה ... במקרה של

(כמשל $Q = K^{0.25}\ L^{0.25}$).

תרגיל נוסף

עבור פונקציית תפוקה ק״ל, ה   התפוקה הממוצעת של K

עולה   אם ורק אם   התפוקה השולית של L

שלילית.

הוכחה:

אם התפוקה הממוצעת עולה ב K אזי

$$\frac{\partial(f/K)}{\partial K} > 0$$

נגזרת זו היא:

$$\frac{\partial(F/K)}{\partial K} = \frac{F_K K - F}{K^2} = \frac{KF_K - (Kf_K + Lf_L)}{K^2}$$

$$= -\frac{Lf_L}{K^2} > 0$$

ולכן   אם נגזרת זו חיובית חייב להתקיים כי

$f_L < 0$.

גורם ייצור משתנה יחיד – TP AP MP

- נניח שיש גורם ייצור משתנה יחיד (L)
- התפוקה הכוללת מסומנת ב – TP וניתנת על ידי F.
- התפוקה השולית מסומנת ב – MP וניתנת על ידי הנגזרת החלקית של F לפי גורם ייצור זה (F_L).
- התפוקה הממוצעת מסומנת ב – AP וניתנת על ידי F/L.
- כיצד נייצג גדלים אלו גראפית ומה היחסים ביניהם?

ייצור עם גורם ייצור משתנה יחיד (L)

Marginal Product	Average Product	Total Output (*Q*)	Amount of Capital (*K*)	Amount of Labor (*L*)
---	---	0	10	0
10	10	10	10	1
20	15	30	10	2
30	20	60	10	3
20	20	80	10	4
15	19	95	10	5
13	18	108	10	6
4	16	112	10	7
0	14	112	10	8
-4	12	108	10	9

ייצור עם גורם ייצור משתנה יחיד (L)

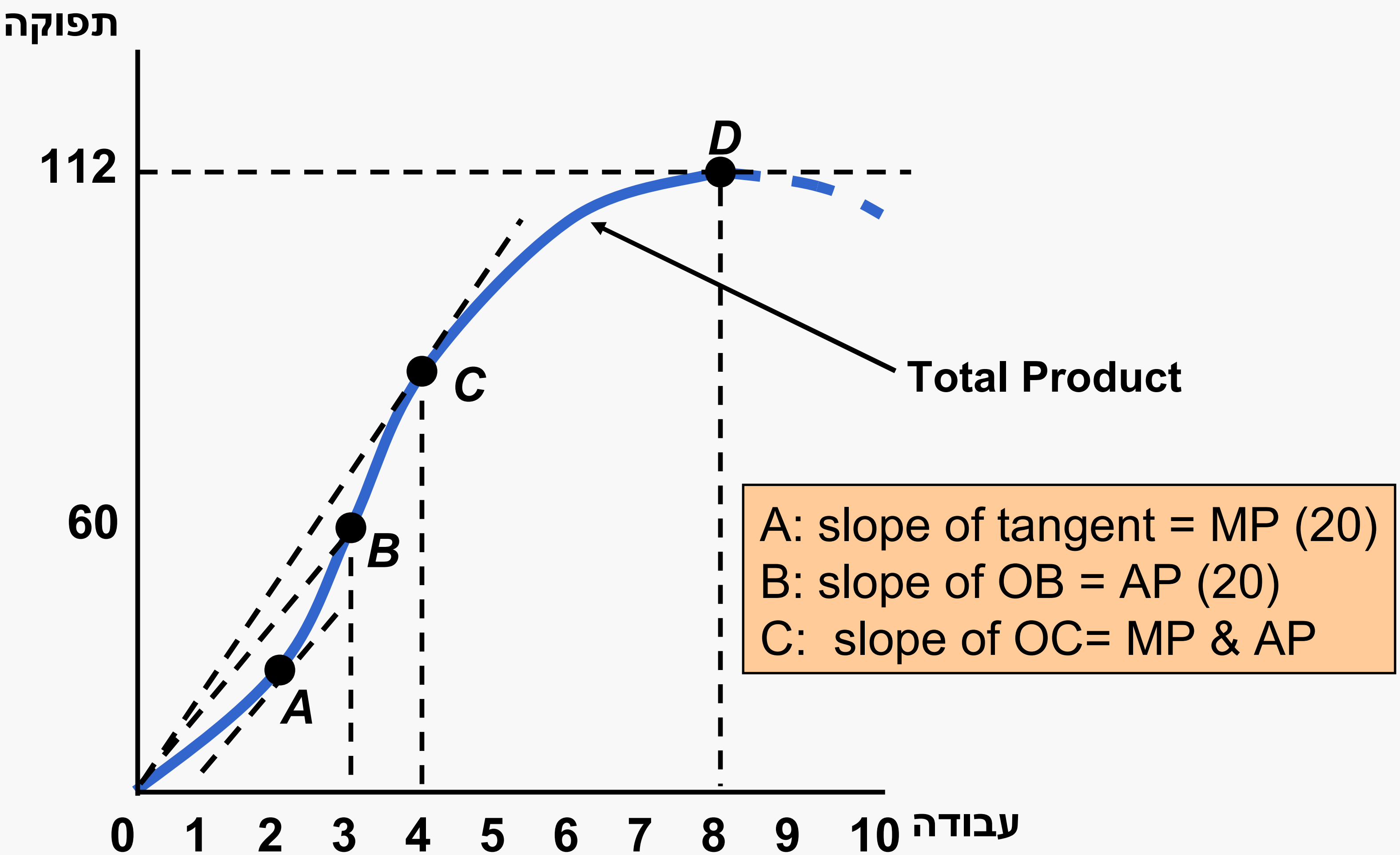
כשנוספים עובדים

התפוקה (TP) גדלה, מגיעה למקסימום ומתחילה לרדת.

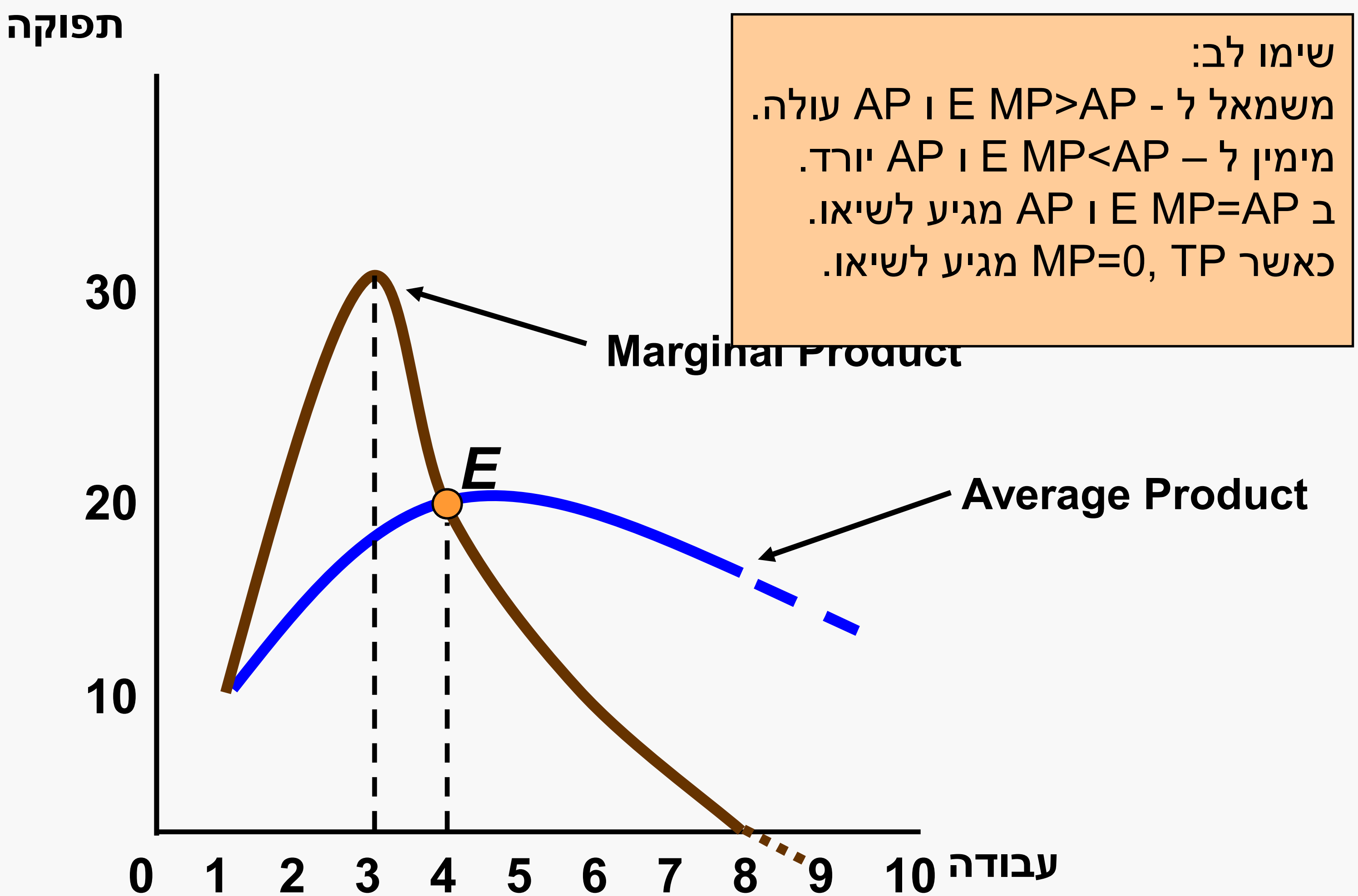
התפוקה הממוצעת ($AP=Q/L$) בתחילה גדלה ולאחר מכן יורדת.

התפוקה השולית ($MP=F_L$) עולה בתחילה ולאחר מכן יורדת ואף נעשית שלילית.

ייצור עם גורם ייצור משתנה יחיד (L)



ייצור עם גורם ייצור משתנה יחיד (L)



שימו לב:
משמאל ל - E MP>AP ו AP עולה.
מימין ל – E MP<AP ו AP יורד.
ב E MP=AP ו AP מגיע לשיאו.
כאשר MP=0, TP מגיע לשיאו.

בעיית מקסימום תפוקה

- המגבלות – תקציב לשכירת תשומות
- המטרות – מקסימום תפוקה
- דרך הפעולה – שכירת צירוף תשומות (גורמי ייצור) הממקסם את התפוקה בהינתן מחיריהם, התקציב ופונקציית הייצור.
- נתונים
  - תקציב ומחירי גורמי הייצור
  - טכנולוגיה (בדרך כלל מיוצגת על ידי פונקציית ייצור)
- תוצאות
  - צירוף גורמי ייצור אופטימאלי ותפוקה מקסימאלית
- למעשה שקול לבעיית צרכן.