קבלת החלטות בתנאי אי וודאות
גישת תוחלת התועלת

נושאי השיעור

- הגרלות ותכניות תצרוכת מותנות
- העדפות על הגרלות
- גישת תוחלת התועלת ופונקצית תועלת VNM
- תרחיש הביטוח
  - מישור העושר
  - מישור מצבי הטבע

הגרלות

- בחירות של פרטים מתבצעות בדרך כלל תחת תנאים של אי וודאות.
- לעיתים קרובות אנו בוחרים בין הגרלות שונות, או באופן יותר מדויק בין משתנים מקריים שונים.

דוגמאות:

לבעלי תואר ראשון בכלכלה יש:
הסתברות 20% לקבל משרה של 5,000 ₪
והסתברות 80% לקבל משרה של 9,000 ₪

לבעלי תואר ראשון במדעי המחשב יש:
הסתברות 30% לקבל משרה של 3,000 ₪
והסתברות 70% לקבל משרה של 11,000 ₪

- רכישת כל תואר כזה הינה למעשה רכישת הגרלה.

תרחיש הביטוח

דוגמת ביטוח

נניח כי לפרט יש רכוש של 40,000 ש"ח

שההסתברות של 0.01 כי רכושו ירד ל— 30,000 ש"ח

כלומר הפרט עומד בפני הגרלה

$(30{,}000 , 40{,}000 ; 0.01 , 0.99)$.

נניח כי הפרט יכול לקנות ביטוח בסך K על ידי תשלום γK כפרמיה.

למשל אם $\gamma=0.02$, הפרט יכול להשיג פיצוי של 5,000 ש"ח במקרה שרכושו ירד תמורת תשלום של 100 ש"ח

אם הפרט רוכש את הביטוח הוא יעמוד בפני הגרלה $(34{,}900 , 39{,}900 ; 0.01 , 0.99)$ תמורת תשלום של 100 ש"ח

ובאופן כללי הפרט יכול להשיג הגרלות מהצורה:

$(30{,}000 + K - \gamma K , 40{,}000 - \gamma K ; 0.01 , 0.99)$

כמה ביטוח יקנה הפרט ואיך משתנה החלטתו כפונקציה של γ?

העדפות על הגרלות

[illegible] ?

[illegible] ?

[illegible]
[illegible] .

[illegible]
[illegible] (contingent consumption plan) .

[illegible] :

מצב 1 (רע) (צרה – X)
מצב 2 (טוב) (צרה – Y)

[illegible]
(אם $K \geq 0$) [illegible] :

[illegible] (40,000 , 30,000)
[illegible] $\gamma/(1-\gamma)$.

[illegible]
[illegible] .
(39,900 , 34,900) [illegible]
34,900 במצב 1 ו – 39,900 במצב 2.

העדפות על הגרלות - 1

נתאר הגרלה או (תכנית תצרוכת מותנית) על ידי:

$$(c_1, \ldots c_n; p_1, \ldots, p_n)$$

מהי התועלת V מהגרלה כזו?

יתכן ו ...

$$V(c_1,c_2;p_1,p_2)=\max(c_1,c_2)\ (\rho>0) \qquad (1)$$

$$V(c_1,c_2;p_1,p_2)=\min(c_1,c_2) \qquad (2)$$

$$V(c_1,c_2;p_1,p_2)=c_1^{p1}\, c_2^{p2} \qquad (3)$$

$$V(c_1,c_2;p_1,p_2)=p_1c_1+p_2c_2 \qquad (4)$$

$$V(c_1,c_2;p_1,p_2)=p_1\ln(c_1)+p_2\mathrm{Ln}(c_2) \qquad (5)$$

$$V(c_1,c_2;p_1,p_2)=p_1c_1^2+p_2c_2^2 \qquad (6)$$

אם V היא מהצורה 4 עד 6, כלומר קיימת פונקציה של תועלת מפרסים שלוקחים את הממוצע שלה
נאמר שהעדפות הפרט מקיימות את גישת תוחלת התועלת.

John Louis von Neumann
1903-1957

Oskar Morgenstern
1902-1976

העדפות - גישת תוחלת התועלת

נסמן את הפונקציה שלוקחים את הממוצע שלה ב – u.

במקרה 4 $u(c)=c$

במקרה 5 $u(c)=Ln(c)$

במקרה 6 $u(c)=c^2$

u תיקרא פונקצית תועלת VNM.

כלומר אם אומרים שלפרט פונקצית תועלת VNM u על מרחב הפרסים, פירושו שהתועלת מהגרלה ניתנת על ידי תוחלת התועלת לפי u.

יש הנחות סבירות שמבטיחות שהעדפות על פרסים ניתנות על ידי תוחלת תועלת.

גישת תוחלת התועלת - האקסיומות

תחת ההנחות הבאות , העדפותיו של הפרט מקיימות
את גישת תוחלת התועלת , כלומר קיימת פונקציית
תועלת u על הפרסים כך שההגרלות מדורגות על ידי
תוחלת התועלת לפי u .

(i) קיים יחס העדפה שלם וטרנזיטיבי על ההגרלות .

(ii) הפרטים מעוניינים רק ב"שורה התחתונה"

כלומר הפרט אדיש בין שתי הגרלות שבסיכומו של דבר נותנות
אותם פרסים באותן הסתברויות .
ההגרלה $(c_1,c_2;0.3,0.7)$
כאשר $c_1=100$ ו- c_2 זו הגרלה $(120, 100; 0.4, 0.6)$

שקולה

להגרלה $(100, 120; 0.72, 0.28)$.

(iii) רציפות

עבור כל שלוש הגרלות $P>Q>R$ יש הגרלה $(P,R;\ \alpha,1-\alpha)$
ששקולה ל Q .

(iv) אי תלות באלטרנטיבות לא רלוונטיות

$P>R$ אמ"מ $(Q,P;\ \alpha,1-\alpha)>(Q,R;\ \alpha,1-\alpha)$

גישת תוחלת התועלת -הערות

האם פונקציות התועלת הבאות (מהגרלות) מקיימות
את גישת תוחלת התועלת ?

$$V(c_1,c_2;p_1,p_2)=c_1^{p1}c_2^{p2}$$

$$V(c_1,c_2;p_1,p_2)=p_1 Ln(c_1)+p_2 c_2^{0.5}$$

במילים אחרות , האם קן סלות לתקבל כתוצאה
מתוחלת התועלת של אותה פונקציית תועלת על
פרסים ?

לא.

באותה שקר בין התועלת של ... לית במצבי הטבע
השונים , התועלת של התצרוכת במצב טבע 1 משפיעה
מהתועלת של התצרוכת במצב טבע 2 .

משני ... ה זו לא את הפונקציה בכל מצב טבע .

אותו דבר נכון אם אין עוד גרלות ניתנות על ידי
תוחלת התועלת .

התועלת בססים ... ויות לצבים השונים
ופונקציית התועלת מוגדרת על פרסים .

גישת תוחלת התועלת – פרסים כלליים

באופן כללי פרסים לא חייבים להיות רק במונחים כספיים, וניתן לחשוב על תכניות תצרוכת מותנית של סלים שונים.

למשל אם פרט יוצא מהבית עם מטריה ומעיל קל ומזג האוויר יכול לקבל אחד מארבעה ערכים:

גשום וקר
גשום וחם
יבש וקר
יבש וחם

יש ארבעה מצבי טבע

והפרט בוחר בעצם בהגרלה של ... .

העדפות ופונקציית תועלתVNM

- פרטים שיש להם אותה פונקציית תועלת VNM, עד כדי טרנספורמציה אפינית עולה ממש, ידרגו הגרלות באותו אופן.
- u הינה טרנספורמציה אפינית עולה ממש של v אם

$$u=a*v+b \quad a>0$$

- לדוגמה אם לפרט 1 יש פונקציית תועלת $u=c^{0.5}$

ולפרט 2 יש פונקציית תועלת $v=3c^{0.5}-10$, תהיינה לשני הפרטים אותן העדפות על הגרלות.

- אם לפרט 2 תהיה פונקציית תועלת $v=c^{0.8}$

העדפות הפרטים על ההגרלות לא תתלכדנה.

Maurice Allais 1911-

Daniel Ellsberg 1931-

פרדוקס ALLAIS

בהינתן שתי ההגרלות הבאות:

A=(1,000,000,0;1,0)

(מיליון ₪ בוודאות)

או

B=(1,000,000,5,000,000,0;0.89,0.1, 0.01)

(מיליון ₪ בהסתברות 89% , 5 מיליון ₪ בהסתברות 10%

ו - 0 ₪ בהסתברות 1%.)

אחוז ניכר מהפרטים מעדיף את

A על B

פרדוקס ALLAIS - 1

בהינתן שתי ההגרלות הבאות:

C=(5,000,000,0;0.1,0.9)

(5 מיליון ₪ בהסתברות 10%)

או

D=(1,000,000,0;0.11,0.89)

(מיליון ₪ בהסתברות 11%)

אחוז ניכר מהפרטים מעדיף את

C על D

פרדוקס ALLAIS - 2

אם הפרט מתנהג לפי אקסיומות תוחלת התועלת
כלומר יש לו פונקציית תועלת u על פרסים והוא
מדרג הגרלות על פי תוחלת התועלת לפי u אזי:

A עדיף על B גורר כי:

$$u(1)>0.1*u(5)+0.89*u(1)+0.01*u(0)$$

C עדיף על D גורר כי:

$$0.1*u(5)+0.9*u(0)>0.11*u(1)+0.89*u(0)$$

לא יתכן !!!

פרדוקס אלסברג

- ישנו כד המכיל 90 כדורים
  - 30 כדורים הינם צהובים
  - 60 כדורים הינם אדומים או כחולים
  - אחוז הכדורים האדומים מתוך 60 הכדורים יכול להיות בין 0 ל 100%.
- אנו נוציא כדור מהכד והפרט יוכל להמר על הצבע שלו.

פרדוקס אלסברג -1

- מצב A
  – הפרט יכול להמר על צבע צהוב או צבע אדום. הימור נכון יזכה אותו ב 100 ₪ והימור מוטעה יזכה אותו ב – 0 ₪.
- מטריצת התשלומים עבור שני ההימורים ניתנת על ידי:

	Y	R	B
Bet yellow	$100	0	0
Bet red	0	$100	0

רוב הפרטים מעדיפים להמר Y.

פרדוקס אלסברג - 2

- מצב B
  - הפרט יכול להמר על צבע (אדום או כחול) או על צבע (צהוב או כחול). הימור נכון יזכה אותו ב 100 ₪ והימור מוטעה יזכה אותו ב – 0 ₪.
- מטריצת התשלומים עבור שני ההימורים ניתנת על ידי:

	Y	R	B
Bet red or blue	0	$100	$100
Bet yellow or blue	$100	0	$100

רוב הפרטים מעדיפים להמר על (אדום או כחול)

פרדוקס אלסברג - 3

אם הפרט מתנהג לפי אקסיומות תוחלת התועלת
כלומר יש לו פונקציית תועלת u על פרסים והוא
מדרג הגרלות על פי תוחלת התועלת לפי u אזי:

ההימור במצב A גורר כי:

$$P(Y)*u(100)+P(R)*u(0)+p(B)*u(0) >$$
$$P(Y)*u(0)+P(R)*u(100)+p(B)*u(0)$$

ההימור במצב B גורר כי:

$$P(Y)*u(0)+P(R)*u(100)+p(B)*u(100) >$$
$$P(Y)*u(100)+p(R)*u(0)+p(B)*u(100)$$

לא יתכן !!!

מושגים שונים

- נניח כי תצרוכתו (רכושו) של הפרט ניתנת על ידי ההגרלה $(C_1,C_2;P_1,P_2)$.

- העדפות הפרט ניתנות על ידי פונקציית תועלת u ,VNM.

- **תוחלת התצרוכת** ניתנת על ידי:

$$C_{bar}= P_1C_1+P_2C_2$$

- **התועלת מההגרלה** (תכנית התצרוכת המותנית) ניתנת על ידי:

$$P_1u(C_1)+P_2u(C_2)$$

- (זו למעשה תוחלת התועלת מההגרלה)

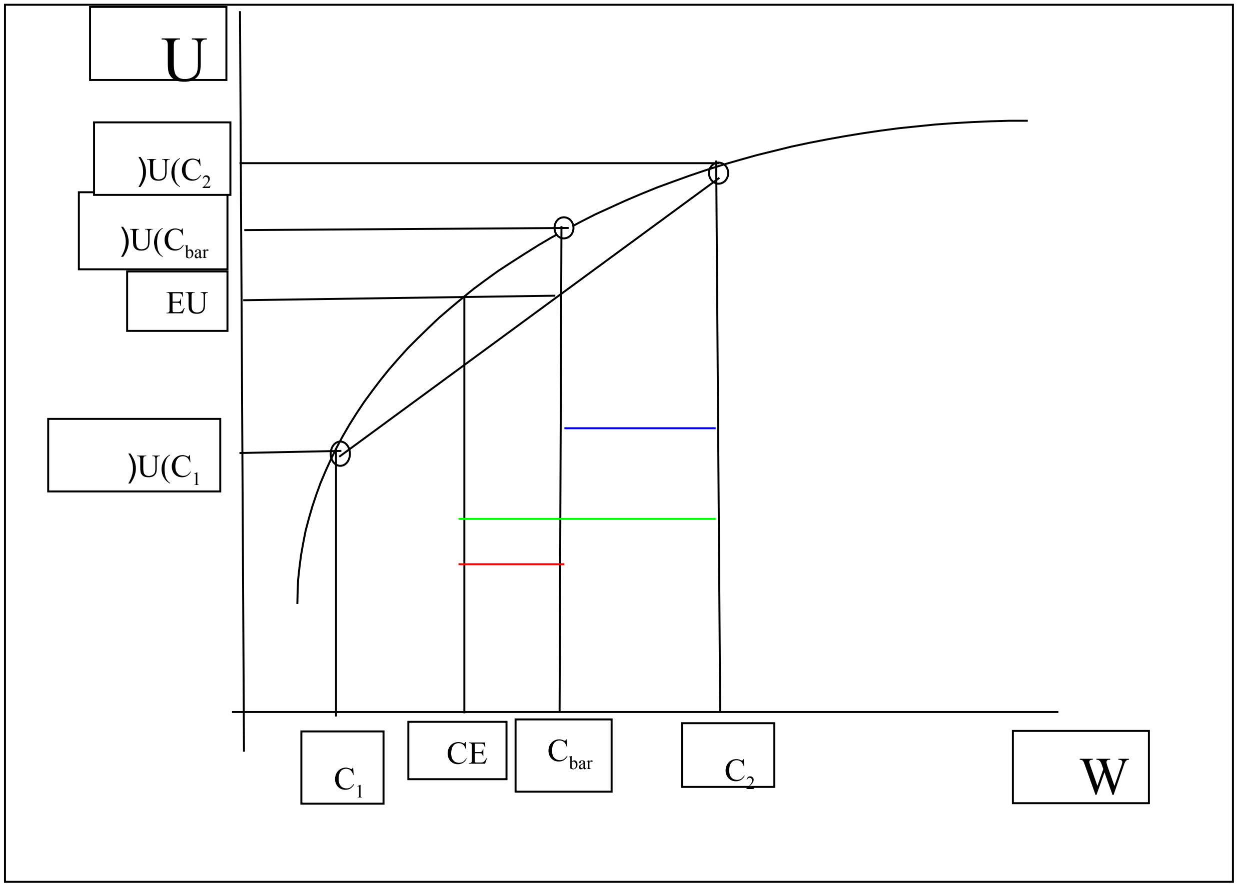
- **שווה הערך הוודאי להגרלה** הינו רכוש C_e המקיים:

$$U(C_e)= P_1u(C_1)+P_2u(C_2)$$

מושגים שונים – המשך
תרחיש הביטוח ב"מישור העושר"

- **פרמיית סיכון** – C_{bar}-C_e
  – הפער בין תוחלת ההגרלה לשווה הערך הוודאי שלה.
- **פרמייה הוגנת** (ביטוח הוגן) – C_2-C_{bar}
  – תוחלת התשלום של חברת הביטוח עבור ביטוח מלא ברמה C_2.
- **פרמייה מקסימלית** – C_2-C_e
  – התשלום המקסימלי שהפרט מוכן לשלם תמורת ביטוח הסיכון.
- ובאופן גראפי ...

הצגה גראפית במישור רכוש - תועלת



אדום – פרמיית סיכון , כחול – פרמייה הוגנת , ירוק – פרמיה מקסימלית

דוגמה מספרית

- נניח כי תצרוכת הפרט ניתנת על ידי (0.2,0.8;100,600) והעדפותיו ניתנות על ידי $u=c^{0.6}$

$C_{bar}=500$, $u(500)=41.63$

$Eu=0.2*100^{0.6}+0.8*600^{0.6}=40.32$ ((התועלת מההגרלה

$C_e=474.13$ $(474.13^{0.6}=40.32)$

25.87- פרמיית הסיכון

100 – ((600-100)*0.2) ((פרמייה הוגנת

אם העדפות הפרט ניתנות על ידי $c^{0.3}$ הן יותר קעורות ואכן מתקבל שווה ערך וודאי נמוך יותר, ולכן פרמיית סיכון גבוהה יותר.

התייחסות לסיכון

- הפרט הינו **שונא סיכון** אם פרמיית הסיכון הינה חיובית.
- הפרט **אדיש לסיכון** אם פרמיית הסיכון הינה אפס.
- הפרט **אוהב סיכון** אם פרמיית הסיכון שלילית.
- כאשר פונקציית התועלת VNM קעורה "ממש" הפרט שונא סיכון. (כאשר $u''<0$)
- פונקציה U קעורה "ממש" אם:
  $U(\gamma x+(1-\gamma)y)> \gamma U(x)+(1-\gamma)U(y)$ עבור $0<\gamma<1$
- כאשר פונקציית התועלת VNM **אפינית** כלומר $a>0$ $U(x)=ax+b$ הפרט אדיש לסיכון.
- פרט אדיש לסיכון מדרג את ההגרלות לפי תוחלת ההגרלה.
- כאשר פונקציית התועלת VNM קמורה "ממש" הפרט אוהב סיכון. (כאשר $u''>0$)
- באופן אינטואיטיבי ככל שפונקציית התועלת קעורה יותר הפרט

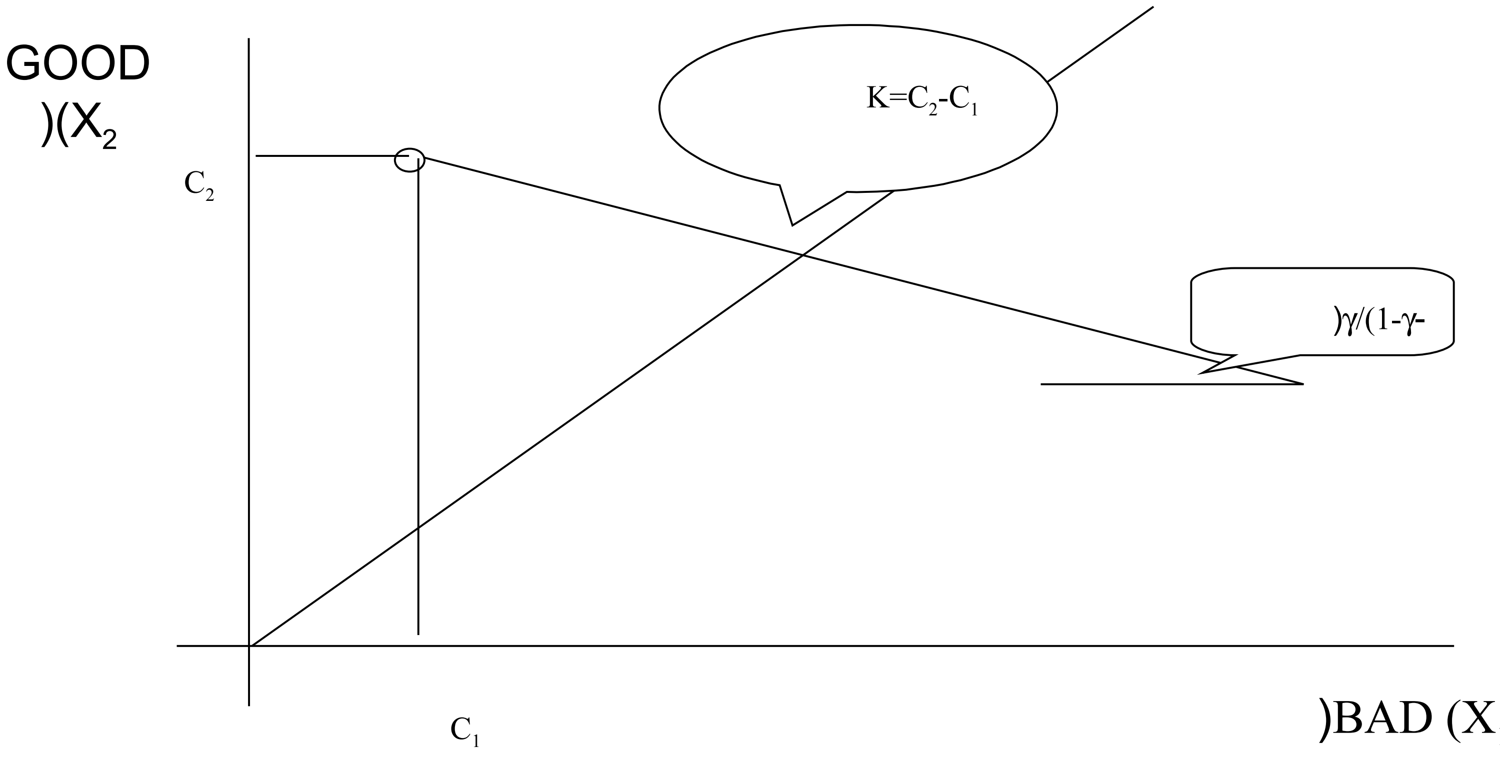
תרחיש הביטוח במישור מצבי הטבע

- נניח כי בהסתברות P_1 קורה "אסון" ורכושו של הפרט במקרה זה הינו C_1, ובהסתברות P_2 האסון אינו קורה ורכושו של הפרט הינו C_2.
- מצב 1 יקרא המצב הרע ומצב 2 יקרא המצב הטוב.
- תמורת פרמיה של □K ניתן לקנות ביטוח בגובה K, כך שאם יקרה מצב הטבע הרע יקבל הפרט K. נניח ש $0 \leq C_2 - C_1 \leq K$
- הפרט יכול לכן להשיג כל תכנית תצרוכת (מותנית) מהצורה:

$$(C_1 - \gamma K + K, C_2 - \gamma K; P_1, P_2)$$

במישור בו מודדים על הציר האופקי את התצרוכת במקרה הרע ועל הציר האנכי את התצרוכת במקרה הטוב נמצאות נקודות אלו על קו המתחיל בנקודה (C_1, C_2) ששיפועו $-\gamma/(1-\gamma)$ ומסתיים על קו ה 45^0 .

הצגה גראפית של ביטוח במישור "מצבי הטבע"



קו תקציב והעדפות במישור מצבי הטבע

- קו התקציב של הפרט ניתן על ידי:

$$)X_2-C_2)=(-\gamma/(1-\gamma))*(X_1-C_1($$

או

$$(\gamma/(1-\gamma))*X_1+X_2=(\gamma/(1-\gamma))*C_1+C_2$$

כל נקודה במישור מייצגת הגרלה, התועלת מכל נקודה

ניתנת לכן על ידי תוחלת התועלת מההגרלה שהיא מייצגת.

נסמן את התועלת מכל נקודה ב – V, ונקבל כי העדפות

הפרט ניתנות על ידי:

$$)V(X_1,X_2)=p_1U(X_1)+p_2U(X_2$$

לאור זאת שיפוע עקומות האדישות ניתן על ידי:

$$)p_1U'(X_1))/(p_2U'(X_2($$

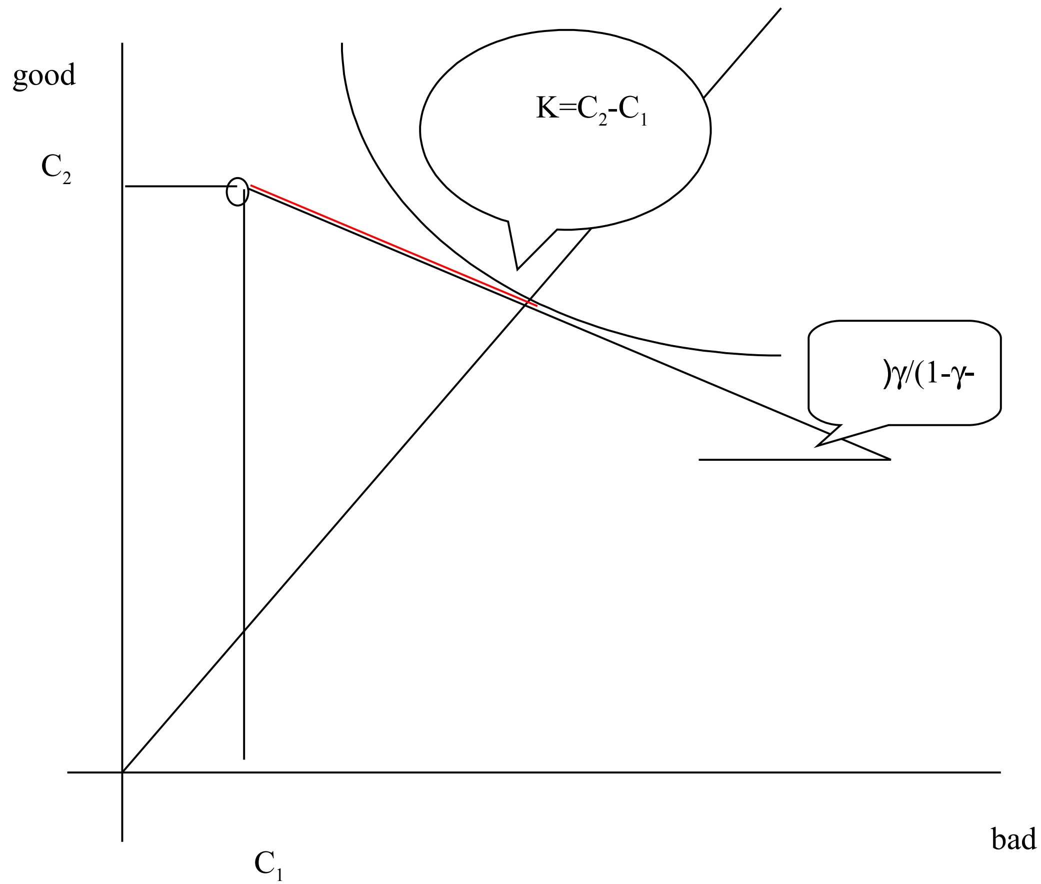
קו הוודאות במישור מצבי הטבע

- קו הוודאות הינו הקו שלאורכו $X_1=X_2$.
- זהו קו ה 45^0.
- שיפוע עקומות האדישות לאורך קו זה (למעשה אינו תלוי בפונקציית התועלת VNM של הפרט) ניתן על ידי: p_1/p_2.

בחירה אופטימאלית במקרה של פרמייה הוגנת

- תוחלת התשלום של חברת הביטוח הינה p_1K
- הפרמייה שהחברה מקבלת הינה □K
- כאשר הפרמייה הוגנת $\gamma = p_1$
- שיפוע קו התקציב במקרה זה הינו: p_1/p_2
- לכן ההשקה לעקומת האדישות מתרחשת על קו ה – 45^0.
- כאשר הפרמייה הוגנת בוחר הפרט לקנות ביטוח מלא $(K=C_2-C_1)$.

הבחירה האופטימאלית במקרה של פרמייה הוגנת



בעיית הביטוח – פתרון אלגברי ב "מישור העושר"

[illegible] :

$$\underset{K}{Max}\ p_1 u(10-\gamma K+K)+p_2 u(40-\gamma K)$$

[illegible] K [illegible]

[illegible]). [illegible] – X_1 [illegible] ' [illegible] 1 [illegible] .

$$(1-\gamma)p_1 u'(X_1)-\gamma p_2 u'(X_2)=0$$

$$\frac{u'(X_1)}{u'(X_2)}=\frac{\gamma(p_2)}{(1-\gamma)\,p_1}$$

or

$$\frac{p_1 u'(X_1)}{p_2 u'(X_2)}=\frac{\gamma}{(1-\gamma)}$$

[illegible] – $p_2=1-p_1$ [illegible] $\gamma=p_1$ [illegible]

ש – $c_1=c_2$.

אם $\gamma<p_1$ [illegible]

[illegible] 45^{o} , [illegible]

[illegible] .

אם $\gamma>p_1$ [illegible]

[illegible] 45^{o} , [illegible]

[illegible] . [illegible] γ [illegible]

[illegible]). [illegible] MRS [illegible] ' [illegible] – C [illegible]

$\frac{\gamma}{(1-\gamma)}$).