

תרגיל 1

פארטו יעילות בכלכלות חליפין

שאלה 1

במשק קיימים שני צרכנים 1 ו-2 ושני מוצרים X ו-Y.

הכמויות המצרפיות של שני המוצרים הינן: $X = 12, Y = 6$.

א. לשני הפרטים פונקציות תועלת זהות: $U(X, Y) = X^{1/2}Y^{1/2}$. חשבו ושרטטו את קבוצת פארטו ואת עקומת אפשרויות התועלת.

ב. הניחו כעת שלשני הפרטים פונקציות תועלת שונות: לראשון פונקצית תועלת:

$$U_1(X_1, Y_1) = X_1^{0.5}Y_1^{0.5}, \text{ ולשני פונקצית תועלת: } U_2(X_2, Y_2) = X_2^{1/3}Y_2^{2/3}$$

חשבו ושרטטו את קבוצת פארטו.

ג. (בתועלות של סעיף ב') האם החלוקה: $X_1 = 2, Y_1 = 4, X_2 = 10, Y_2 = 2$

הינה פארטו יעילה? הסבירו (תנו דוגמה לשיפור פארטו, או הראו שאין שיפור כזה).

שאלה 2

בכלכלת חליפין שני מוצרים (x, y) , ושני צרכנים (1 ו-2), סך ה- x במשק הנו 20 וסך ה- y במשק הנו 15. חשבו ושרטטו את קבוצת פארטו בתיבת אדג'וורת' כאשר העדפות הצרכנים ניתנות על ידי:

$$u_1(x_1, y_1) = x_1 + \sqrt{y_1}$$

$$u_2(x_2, y_2) = x_2 + \ln y_2$$

תארו את עקומת אפשרויות התועלת בתחום המתאים לחלק ה"פנימי" של קבוצת פארטו.

שאלה 3

הניחו כי בכלכלה ישנם שני מוצרים ושלושה פרטים (A, B, C) שהעדפותיהם ניתנות על ידי: $U_A(x, y) = x; U_B(x, y) = x + y; U_C(x, y) = y$. במשק יש 100 יחידות מכל מוצר. מהן ההקצאות הפארטו יעילות?

שאלה 4

במשק קיימים שני צרכנים 1 ו-2 ושני מוצרים X ו-Y.

הראו כי אם לשני הפרטים העדפות הומוטתיות זהות שמתנהגות "יפה ממש" אזי קבוצת פארטו ניתנת על ידי אלכסון התיבה.

הראו כי אם לשני הפרטים העדפות הומוטתיות שאינן זהות אך עדיין מתנהגות "יפה ממש" אזי אם קיימת הקצאה פארטו יעילה פנימית על אלכסון התיבה, קבוצת פארטו הפנימית הינה אלכסון התיבה ואם קיימת הקצאה פארטו יעילה פנימית מעל לאלכסון התיבה אזי קבוצת פארטו הפנימית נמצאת מעל לאלכסון התיבה.

תרגיל 2

פארטו יעילות בכלכלות ייצור וחליפין-ייצור

כלכלות ייצור

שאלה 1

פירמה A מייצרת מוצר X ופירמה B מייצרת מוצר Y.

פונקציות הייצור שלהן: $Y = L_A + 2K_A$ $X = L_A^{1/3} K_A^{2/3}$ (L ו-K הם עבודה והון).

ברשות המשק 200 יחידות עבודה ו-120 יחידות הון.

א. לפירמה A יש 100 יח' הון ו-40 יח' עבודה, ולפירמה B 20 יח' הון ו-160 יח' עבודה. הצביעו על הקצאות יעילות יותר מהקצאה זו.

ב. חשבו את כל החלוקות הפארטו יעילות של הון ועבודה בין שתי הפירמות.

ג. חשבו את עקומת התמורה בין X ו-Y באופן אלגברי ושרטטו אותה.

שאלה 2

במשק מייצרים שני מוצרים X ו-Y בטכנולוגיות של פרופורציות קבועות. כדי ליצר יחידה אחת של X דרושות יחידה אחת של עבודה ויחידה אחת של הון, וכדי ליצר יחידה אחת של Y דרושות יחידה אחת של עבודה ושלוש יחידות הון.

ברשות המשק 100 יחידות עבודה ו-200 יחידות הון.

א. האם זה יעיל להקצות 60 יחידות עבודה ו-100 יחידות הון ל-X (והשאר ל-Y)?

ב. התוו בתבנת אדג'וורת את אוסף ההקצאות הפארטו יעילות בייצור.

ג. התוו את עקומת התמורה בין X ל-Y. מהם התחומים על עקומת התמורה המייצגים

תעסוקה מלאה של כל אחד מגורמי הייצור?

כלכלות חליפין-ייצור

שאלה 3

במשק מייצרים שני מוצרים X ו-Y בעזרת הון K ועבודה L.

פונקציות הייצור של X ו-Y הן: $X = K_X + L_X$ $Y = K_Y + 0.5L_Y$

במשק קיימות 100 יחידות K ו-200 יחידות L.

לכל הפרטים במשק אותה פונקצית תועלת: $U_i = X_i^{2/3} Y_i^{1/3}$

א. התוו את קו הייצור היעיל בתבנת אדג'וורת, ואת עקומת התמורה של המשק.

ב. המשק נמצא על עקומת התמורה שלו ומייצר 100 יחידות X. חשבו את אוסף הקצאות

התצרוכת הפארטו יעילות בהינתן שזו נקודת הייצור. הראו שנקודת ייצור זאת אינה נקודת ייצור

פארטו יעילה עבור משק זה.

ג. חשבו הקצאת מקורות פארטו יעילה של ייצור וצריכה במשק זה. מהו אוסף נקודות הייצור המהוות חלק מהקצאה פארטו יעילה? האם אתם מופתעים מהתשובה? הסבירו.

שאלה 4

במשק פועלות שתי פירמות, אחת מייצרת X לפי פונקציית הייצור $X = L_x^{1/4} K_x^{1/4}$ והשנייה

מייצרת Y לפי פונקציית הייצור $Y = 6K_y + 6L_y$

ברשות המשק 100 יחידות L ו-100 יחידות K .

במשק 2 צרכנים. לצרכן אחד פונקציית תועלת $U_1 = X_1 Y_1$ ולשני $U_2 = X_2 Y_2^2$

א. הראו שיש נקודות ייצור רבות המהוות חלק מהקצאה פארטו יעילה במשק.

ב. חשבו לכל נקודת ייצור כזו את הקצאת התצרוכת אשר ביחד איתה מהווה הקצאה פארטו יעילה במשק זה.

שאלה 5 (רשות)

במשק קיימים שני צרכנים 1 ו-2, שני מוצרים X ו- Y . עקומת התמורה של המשק מתנהגת "יפה ממש".

הראו כי אם לשני הפרטים העדפות הומוטטיות זהות שמתנהגות "יפה ממש" אזי ישנו צירוף ייצור יחיד המהווה חלק מהקצאה פארטו יעילה וחלוקות התצרוכת אשר ביחד איתו מהוות הקצאה פארטו יעילה ניתנות על ידי אלכסון התיבה שהוא מגדיר במישור המוצרים.

רמז: חשבו את נקודת הייצור שממקסמת את רווחתו של צרכן 1 (ולכן גם את רווחתו של צרכן 2) והראו שהיא מהווה חלק מהקצאה פארטו יעילה. הראו שכל נקודה על אלכסון התיבה היא מגדירה מהווה חלוקת תצרוכת יעילה המתאימה לה. הסבירו מדוע לא יתכנו נקודות ייצור פארטו יעילות נוספות (שקיימת עבורן חלוקת תצרוכת כך שהן ביחד מהוות הקצאה פארטו יעילה).

תרגיל 3

שיווי משקל תחרותי ומשפט הרווחה הראשון

כלכלות חליפין

שאלה 1

במשק קיימים שני צרכנים A ו-B ושני מוצרים X ו-Y .

לשני הצרכנים אותה פונקציות תועלת $U(X,Y) = X^{1/2}Y^{1/2}$

הכמויות מצרפיות של X ו-Y נתונות: $X = 12, Y = 6$

ההקצאה ההתחלתית של המוצרים היא: $X_B = 10, Y_B = 2$; $X_A = 2, Y_A = 4$,

א. מהו וקטור מחירים של שיווי משקל תחרותי?

ב. איזו הקצאה תתקבל בוקטור מחירים זה?

ג. האם הקצאה זו היא פארטו יעילה?

שאלה 2

בכלכלת חליפין ישנם שני מוצרים $(x - y)$ ושני צרכנים $(1 - 2)$ עם ההעדפות הבאות:

$$U_1 = 0.5 \ln(x_1) + 0.5 \ln(y_1); \quad U_2 = 2x_2^{0.5} + 2y_2^{0.5}$$

חשבו את מחירי שיווי המשקל והקצאות שיווי המשקל כאשר ההקצאות התחיליות הן:

א. $W_1 = (1,4)$ $W_2 = (6,3)$

ב. $W_1 = (7,7)$ $W_2 = (0,0)$

שאלה 3

במשק יש שני פרטים:

לראובן פונקצית תועלת: $U(X_1, Y_1) = X_1 + 5Y_1$

ולדינה פונקצית תועלת: $U(X_2, Y_2) = \ln X_2 + \ln Y_2$

א. ראובן מתחיל עם שתי יחידות X ושתי יחידות Y ודינה עם יחידה אחת של X ואחת של Y.

חשבו שווי משקל תחרותי במשק זה והציגו אותו בתיבת אדג'וורת'.

ב. הניחו עתה שראובן מתחיל עם שתי יחידות X ויחידה אחת של Y, והשאר לדינה. בדקו

לגבי כל אחד מיחסי המחירים הבאים, האם הוא יחס מחירים של שיווי משקל, וחשבו

את ההקצאה הסופית שמתקבלת במקרה של שיווי משקל:

(1) $P_X / P_Y = 1/10$ (2) $P_X / P_Y = 1/4$ (3) $P_X / P_Y = 1/2$

כלכלות חליפין-ייצור

שאלה 4

במשק מייצרים שני מוצרים X ו-Y באמצעות גורם יצור אחד a. הכמות הכללית של a במשק היא 800 יחידות. פונקציות היצור של X ו-Y נתונות על ידי :

$$X = 0.5a_x^{1/2} \quad Y = a_y^{1/2}$$

במשק שני פרטים עם פונקצית תועלת: $U(X, Y) = XY$

- הניחו שלכל פרט בעלות שווה על גורם הייצור ועל הפירמות. חשבו מחירים והקצאה של שיווי משקל תחרותי.
- מה יהיו מחיר a והרווחים מייצור X ו-Y בשיווי משקל תחרותי שבו מחיר Y הוא 1?
- הניחו כעת כי לאחד הפרטים במשק, יוסי שמו, 20% מהבעלות על a, 80% מהבעלות על יצרן X ו-20% מהבעלות על יצרן Y. חשבו את הסל אותו יצרוך בשיווי משקל.
- חשבו את עקומת התמורה של המשק. האם נקודת הייצור של שיווי משקל תחרותי נמצאת עליה? האם ההקצאה התחרותית פארטו יעילה?

שאלה 5

במשק פועלות שתי פירמות. אחת מייצרת את X לפי פונקצית היצור $X = L^{1/4} K^{1/4}$ והשנייה את Y לפי פונקצית היצור $Y = 6K + 6L$. ברשות המשק 100 יחידות L ו-100 יחידות K. במשק יש שני צרכנים עם אותה פונקצית תועלת $U = XY^2$ ובעלות שווה על הכול.

א. חשבו מחירים והקצאה של שיווי משקל תחרותי במשק.

הניחו כעת שבמשק יש שני צרכנים, A ו-B, עם פונקציות תועלת שונות:

$$U_A = X_A Y_A \quad , \quad U_B = X_B Y_B^2$$

- חשבו מחירים והקצאה של שיווי משקל תחרותי במשק, בהנחה שלשניהם בעלות שווה על הכול.
- הניחו כעת שינוי בחלוקת הבעלות על המקורות: לשני הצרכנים בעלות שווה על העבודה, אבל B הוא הבעלים של כל ההון ושל שתי הפירמות. חשבו מחירים והקצאה של שיווי משקל תחרותי במשק, והשוו את התוצאה שקיבלתם לסעיף הקודם.

משפט הרווחה הראשון

שאלה 6

במדינת "פרובנצה" יש שני מוצרים (x, y) , שני צרכנים $(1, 2)$, גורם ייצור יחיד (K) , שתי פירמות (A, B) וכמות תחילית K^* של K .

העדפותיו של פרט i ניתנות על ידי $U_i(X_i, Y_i)$.

פירמה A מייצרת באמצעות K את X ו- Y . נסמן ב- X_A, Y_A, K_A את כמויות ה- X וה- Y אותן היא מייצרת ואת כמות ה- K בה היא משתמשת. צירופי ה- X וה- Y אותם היא יכולה לייצר

$$X_A^2 + Y_A^2 = K_A$$

פירמה B מייצרת באמצעות K את Y . נסמן ב- Y_B, K_B את כמות ה- Y אותה היא מייצרת ואת כמות ה- K בה היא משתמשת. פונקציית הייצור שלה ניתנת על ידי $G(K_B)$.

(כלומר אם K_A יחידות גורם ייצור מוקצות לפירמה A והיא מייצרת צירוף (X_A, Y_A) , ו- K_B יחידות גורם ייצור מוקצות לפירמה B , סך כמות ה- X המיוצרת ניתן על ידי X_A , וסך כמות ה-

$$Y \text{ המיוצרת ניתן על ידי } G(K_B) + Y_A$$

א. הראו כי כל הקצאה פארטו יעילה פנימית חייבת לקיים:

$$\frac{U_{1X}}{U_{1Y}} = \frac{U_{2X}}{U_{2Y}} = \frac{X_A}{Y_A}$$

$$2G'(K_B) = 1$$

ב. הסבירו תנאים אלו במונחי יעילות והתאמה בין ייצור לצריכה.

ג. מהי הבעיה אותה פותרת פירמה A בשיווי משקל תחרותי? מהם תנאי הסדר הראשון אותם מקיימת פירמה A בשיווי משקל תחרותי?

ד. הראו כי בשיווי משקל תחרותי בכלכלה זו מתקיימים כל התנאים מסדר ראשון להקצאה פארטו יעילה.

תרגיל 4

התערבות ממשלה

שאלה 1

הניחו כי בכלכלה יש שני פרטים (1 ו-2), שני מוצרים (X ו-Y), גורם ייצור יחיד (K), שני יצרנים (A ו-B) וכמות תחילית K^* של K. העדפותיו של פרט 1 ניתנות על ידי: $U_1(X_1, Y_1)$
 העדפותיו של פרט 2 ניתנות על ידי: $U_2(X_2, Y_2)$
 יצרן A מייצר באמצעות K את X ויצרן B מייצר באמצעות K את Y כשפונקציות הייצור ניתנות על ידי: $F(K_X)$ ו- $G(K_Y)$.

א. הראו כי בשיווי משקל תחרותי בכלכלה זו מתקיים:
$$\frac{U_{1X}}{U_{1Y}} = \frac{U_{2X}}{U_{2Y}} = \frac{G'}{F'}$$

ב. הניחו כי מוטל מס בשיעור t על השימוש ב-K של יצרן B (כלומר יצרן A רואה את המחיר P_K בעוד שיצרן B רואה את המחיר $P_K(1+t)$). האם ההקצאה התחרותית שתתקבל לאחר הטלת המס הינה יעילה פרטו? במידה ותשובתכם שלילית, הסבירו את סוגי העיוותים הנוצרים.

ג. כיצד הייתה משתנית תשובתכם לסעיף ג' במידה והייצור של X ו-Y היה מתבצע באמצעות שני גורמי ייצור K ו-L?

שאלה 2

הניחו שיש במשק רק שני מוצרי צריכה, בתים ומוצרים חקלאיים. שני המוצרים נמכרים בשווקים תחרותיים. יש רק שני גורמי ייצור, קרקע ועבודה, וגם הם נסחרים בשווקים תחרותיים, אך יש חוק ממשלתי שקובע מכסימום לכמות הקרקע שאפשר להקצות לשימוש לבניה.

א. התוו את עקומת התמורה של המשק בין שני המוצרים בהנחה שאין הגבלה על שימושי קרקע, וכן התוו את עקומת אפשרויות הייצור (מעין עקומת תמורה) המתחשבת בהגבלה על שימושי קרקע. ציינו את התחום שבו המגבלה אפקטיבית והתחום שבו אינה אפקטיבית בעקומת התמורה ובתיבת אדג'וורת' (במישור גורמי הייצור).

הניחו שהמשק נמצא בשיווי משקל תחרותי שבו ההגבלה על שימוש קרקע אפקטיבית ושיש תחרות משוכללת בשווקים למוצרי חקלאות, בתים, קרקע חקלאית וקרקע לבניה.

ב. ציינו את נקודת שיווי המשקל של המשק בתיבות אדג'וורת' עבור הצריכה והייצור והתוו את קווי התקציב שאותם רואים הצרכנים והיצרנים בנקודות אלו.

ג. בהנחה שהשווקים למוצרי חקלאות, בתים ועבודה הם תחרותיים כאמור לעיל, האם שכר העבודה בחקלאות שווה לשכר העבודה בבניה? האם דמי חכירת קרקע שווים בשני הענפים? האם הקצאת המקורות פארטו יעילה? הסבירו.

שאלה 3

במשק שני פרטים – A ו-B בעלי פונקציית תועלת זהה $u = 5x^{1/3}y^{1/3}$. לפרט A סל

תחילי של 10 יחידות X ו-5 יחידות Y, לפרט B סל תחילי של 5 יחידות Y.

א. שרטטו את תיבת אדגיוורת' של המשק המתואר ואת ההקצאה התחילית. חשבו ושרטטו את אוסף ההקצאות הפארטו יעילות.

ב. חשבו את המחירים וההקצאה של שיווי משקל תחרותי במשק זה (ננרמל את מחיר y ל-1), וודאו כי היא מהווה חלוקה יעילה בין הפרטים.

ג. מהן התועלות של פרט A ופרט B בהקצאה התחרותית?

על מנת להוריד את רמת אי השוויון במשק הועלתה הצעה להטיל מס בגובה t על קניית מוצר y ולתת את כל תקבולי המיסים לפרט B. (ננרמל את מחיר המכירה של y כ-1; מחיר הקניה הוא $1+t$ והקונה מעביר את t לממשלה, שימו לב שבשיווי משקל פרט A יקנה את y).

ד. חשבו את המחירים וההקצאה של שיווי משקל תחרותי במשק זה כאשר שיעור המס הוא t.

ה. הניחו כעת כי $t=0.1$. מהו מחיר המוצר x בשיווי משקל ומהי הקצאת שיווי משקל?

ו. האם שיווי המשקל המתקבל הוא יעיל? כיצד השתנו רמות התועלת של הפרטים?

ז. האם המס משרת את מטרת הממשלה?

תרגיל 5

מונופול

שאלה 1

א. פונקציית הביקוש העומדת בפני המונופול היא $Q=100-3P$, למונופול יש עלות שולית קבועה שווה ל-20.

a. מהו המחיר שיקבע המונופול ומהי הכמות שימכור?

b. בכמה יעלה מחיר התפוקה אם הממשלה מטילה מס של 10 ליחידה על התפוקה?

c. כיצד היו משתנות התשובות, אם היצרן היה מתנהג בצורה תחרותית?

ב. פונקציית הביקוש העומדת בפני המונופול היא $Q = \frac{7,000}{P^2}$. והעלות השולית שלו היא 1 ליחידת תפוקה.

a. מהו המחיר שיקבע המונופול ומהי הכמות שימכור?

b. בכמה יעלה מחיר התפוקה אם הממשלה מטילה מס של 0.50 ליחידה על התפוקה?

c. כיצד היו משתנות התשובות, אם היצרן היה מתנהג בצורה תחרותית?

ג. פונקציית הביקוש העומדת בפני המונופול היא $Q=90-0.5P$.

$$C(Q) = \begin{cases} A + 20Q & Q > 0 \\ 0 & Q = 0 \end{cases} \text{ פונקציית ההוצאות שלו הינה:}$$

a. מהו ה-A הגדול ביותר שעבורו יבחר המונופול לייצר תפוקה חיובית?

b. מהי הכמות אותה תייצר פירמה כזו בשוק תחרותי?

שאלה 2

מונופול מייצר מוצר X וניצב מול פונקציית ביקוש: $P = 120 - X$

בטווח הקצר למונופול שני מפעלים, שלכל אחד פונקציית הוצאות: $TC(X) = 16 + X^2$

(ההוצאה הקבועה 16, הינה הוצאה שקועה בטווח הקצר)

א. מהו המחיר שיקבע המונופול בטווח הקצר, איזו כמות ימכור וכמה ייצר בכל מפעל?

בטווח ארוך יכול המונופול לבחור את מספר המפעלים כרצונו (בטווח הארוך ההוצאה הקבועה 16 אינה שקועה).

ב. חשבו את פונקציית ההוצאות של המונופול בטווח הארוך.

ג. כמה מפעלים יקים המונופול בטווח הארוך, מהו המחיר שייקבע בשוק, כמה ימכור וכמה ייצר בכל מפעל?

שאלה 3

יצחק רכש זכויות בלעדיות להוצאת ספר תרגילים חדש בתורת המחירים. עלויות ההוצאה לאור כוללות תשלום למחבר ועלויות הדפסה והפצה.

אלמלא היה על יצחק לשלם שכר סופרים למחבר, היה מוכר 1,000 עותקים ומרוויח מכך 10,000 שקלים (זאת בהתחשב בעלויות הייצור האחרות ובביקוש לספר). מאחר שעליו לשלם גם שכר סופרים שוקל יצחק שלוש אפשרויות תשלום:

- א. המחבר יקבל שקל לכל ספר שיימכר.
 - ב. המחבר יקבל תשלום חד פעמי של 1000 שקלים.
 - ג. המחבר יקבל 10% מההפרש שבין הפדיון להוצאות ההדפסה וההפצה.
- איזו מהאפשרויות עדיפה בעיני המחבר ואיזו עדיפה בעיני יצחק? היעזרו בשרטוט.

שאלה 4

מונופול נהנה מבלעדיות במכירת מכוניות באי מסוים. המונופול מייבא את המכוניות בעלות של 10,000 כל אחת ומוכר אותן במחיר המביא את רווחיו למקסימום. יום בהיר אחד הממשלה מספחת אי שכן ומרחיבה את בלעדיות המונופול גם לאי זה. לתושבי האי המסופח אותם הטעמים והכנסות כמו לתושבי האי הראשון, וגודל האוכלוסיות זהה. מה יקרה למחיר ולכמות המכוניות שהמונופול ימכור?

שאלה 5

בייצור המוצר X קיים מונופול. כדי לתקן את העיוות הנגרם בהקצאת המקורות מוצעים האמצעים הבאים. לגבי כל אחד מהאמצעים האלה ציין האם וכיצד ניתן להשיג הקצאת מקורות פארטו-יעילה.

- א. מתן סובסידיה ליחידת מוצר.
- ב. מתן סובסידיה לגורם יצור בו משתמש המונופול, כאשר:
 - a. גורם היצור אשר לו ניתנת הסובסידיה הוא גורם יצור משתנה יחיד.
 - b. קיים גורם יצור משתנה נוסף אשר לו, לא ניתנת סובסידיה.
- ג. קביעת מחיר מקסימום למוצר, כאשר:
 - a. ההוצאות הממוצעות עולות בתחום הרלבנטי.
 - b. ההוצאות הממוצעות יורדות בתחום הרלבנטי.

שאלה 6

למונופול המוכר את המוצר X בשני שווקים (A ו- B) פונקצית ההוצאות הבאה:

$$C(X) = 30 + X + 0.5X^2$$

פונקציות הביקוש בשני השווקים הן כדלקמן:

$$P_A = 64 - 4X_A \quad \text{בשוק A}$$

$$P_B = 32 - 2X_B \quad \text{בשוק B}$$

- א. חשבו את תפוקת המונופול ורווחיו כשהוא יכול להפלות בין השווקים.
- ב. השוו את התנהגות המונופול במצב זה למצב שבו אינו יכול להפלות בין השווקים.
- ג. השוו את עודף הצרכן בשני המצבים, ואת סך העודפים (צרכן ויצרן).

שאלה 7

ענף X הוא מונופול, וקיים איסור על יבוא מוצר X . הוצע לבטל את האיסור על היבוא. (הניחו

שאין הוצאות הובלה על מוצר X וכי המחיר העולמי של X קבוע.)

בהנחה שאין יצוא במצב הנוכחי, כיצד ישפיע הצעד המוצע על:

- א. המחיר והכמות שהמונופול מוכר בשוק המקומי; כמות המכירות בחו"ל; סך התפוקה של המונופול; וכמות X הנצרכת על ידי הצרכנים המקומיים.
- ב. ענו על א' בהנחה שיש יצוא במצב הנוכחי.
- ג. האם העובדה שהמשק מייצא X היא תוצאה של ההגנה על מוצר זה מפני יבוא?

תרגיל 6

תחרות בין מעטים

קורנו, פירמה מובילה

שאלה 1

ענף שפועלות בו שתי פירמות עומד בפני עקומת ביקוש $P = 100 / (q_1 + q_2)^{1/2}$ כאשר q_1 תפוקת פירמה 1, q_2 תפוקת הפירמה 2, ולשתי הפירמות ההוצאה השולית בייצור קבועה ושווה 1 (אין הוצאות קבועות).

- א. מהן הכמויות אותן תייצר כל פירמה, והמחיר שיקבע בשוק במודל קורנו? (אפשר ל"נחש" שהפתרון סימטרי).
- ב. הניחו שהפירמות מתאחדות. כמה תייצר הפירמה המאוחדת?
- ג. כמו בסעיף הראשון, אבל בענף פועלות N פירמות. תארו את הפתרון באופן אלגברי. מה יהיה המחיר כאשר $N = 1$? מה יהיה המחיר כאשר $N = \infty$? הסבירו.

שאלה 2

הביקוש המצרפי לסוכריות ניתן על ידי הפונקציה $Q(P) = 100 - 2P$. בשוק ישנן שתי פירמות שמייצרות סוכריות. פונקצית העלות של פירמה 1 היא $C_1(q_1) = 0.25q_1^2$, ופונקצית העלות של פירמה 2 היא $C_2(q_2) = 0.125q_2^2$.

- א. הניחו כי הפירמות מתנהגות בצורה תחרותית וחשבו שיווי משקל תחרותי בשוק זה.
- ב. הניחו כי פירמה 2 הופכת לפירמה מובילה, בעוד שפירמה 1 ממשיכה להתנהג בצורה תחרותית, וחשבו את שיווי המשקל שיתקבל.
- ג. הניחו כי שתי הפירמות מתחרות בכמויות וחשבו את שיווי משקל קורנו.
- ד. הניחו כי שתי הפירמות משתפות פעולה, וחשבו את המחיר שיקבע והכמות אותה תייצר כל פירמה.

שאלה 3

פונקצית הביקוש לפיצות בשדרות היא $Q(P) = 1000P^{-1.5}$. בעיר פועלות ארבע פיצריות עם עלויות זהות, והשוק נמצא בשיווי משקל קורנו. מהו היחס בין המחיר לעלות השולית, P/MC , בשוק זה?

שאלה 4

- מוצר הומוגני מיוצר על ידי שתי פירמות. עקומת הביקוש למוצר נתונה על ידי: $P=120-Q$. פונקציית ההוצאות של פירמה 1 הינה: $C(q_1)=9q_1$. פונקציית ההוצאות של פירמה 2 הינה: $C(q_2)=12q_2$.
- מהן הכמויות אותן תייצר כל פירמה, והמחיר שיקבע בשוק במודל קורנו?
 - הניחו שהממשלה החליטה לסבסד את הייצור של פירמה 1 בסך 9 ליחידה, ובמקביל לחייב אותה לשלם מס קבוע בגודל 396. מהן הכמויות והמחיר שיתקבלו בפתרון קורנו החדש?
 - האם תקציב הממשלה מאוזן? מה יהיו רווחי הפירמות? מה הסיבה לכוון השינוי ברווחי הפירמות?

שאלה 5

- בענף ישנן שלוש פירמות זהות. פונקציית ההוצאות של כל פירמה הינה: $C(q_i)=0$. הביקוש למוצר ניתן על ידי: $P=160-Q$.
- מהן הכמויות המיוצרות, מחיר המוצר ורווחי הפירמות בפתרון קורנו?
 - הניחו שפירמות 2 ו-3 מתמזגות ומהוות כעת את פירמה 4. חשבו את פתרון קורנו בענף עם פירמות 1 ו-4. האם המיזוג היה כדאי לשתי הפירמות?

שאלה 6

- בשוק ה"אספירול" קיים יצרן מוביל מחיר ושמונה יצרנים קטנים, הפועלים כל אחד באופן תחרותי. פונקציית ההוצאות של הפירמה המובילה ניתנת על ידי: $C_M(q_M)=2q_M$, ופונקציית ההוצאות של כל אחת מהפירמות התחרותיות היא $C(q_i)=150q_i+q_i^2$. הביקוש המצרפי לאספירול ניתן על ידי: $Q=1000-P$.
- מהו ההיצע המצרפי של הפירמות התחרותיות (בהינתן P)?
 - מהי פונקציית הרווח שהפירמה המובילה ממקסמת?
 - מהו המחיר שהפירמה המובילה קובעת, ומהן הכמויות שמייצרות הפירמות הפועלות בשוק? כמה מרוויחה כל פירמה?

שאלה 7

- בשוק הפרחים יש פירמה מובילה ו- n פירמות עוקבות, המתנהגות כפירמות תחרותיות. לאחת מהפירמות העוקבות, "ורד השפלה" פונקציית עלות זהה לזו של הפירמה המובילה. הביקוש המצרפי יורד משמאל לימין.
- איזו פירמה, המובילה או "ורד השפלה", תייצר יותר?
 - הראו שרווחיה של ורד השפלה גבוהים מרווחיה של הפירמה המובילה.

תרגיל 7

תחרות בין מעטים

ברטראנד, הוטלינג, סאלופ

שאלה 1

שתי פירמות מוכרות חטיפים לצופי משחק גמר אליפות אירופה. מערכת הביקוש של הצופים לחטיפים ניתנת על ידי:

$$P_1 = 84.375 - 0.375Q_1 - 0.125Q_2$$

$$P_2 = 78.125 - 0.375Q_2 - 0.125Q_1$$

כאשר Q_i ו P_i מייצגים את המחיר והכמות של פירמה i .

ההוצאות של פירמה 1 ניתנות על ידי: $C_1(Q_1) = 3Q_1$

ההוצאות של פירמה 2 ניתנות על ידי: $C_2(Q_2) = 4Q_2$

א. הניחו שעל פי תנאי הזיכיון כל פירמה אמורה להביא כמות חטיפים למכירה במשחק.

מה יהיו הכמויות, המחירים והרווחים בשיווי משקל שיתקבל (מודל קורנו עם מוצרים מובדלים)?

ב. הניחו שעל פי תנאי הזיכיון כל פירמה אמורה לקבוע מהו המחיר שבו ימכרו החטיפים שלה. השתמשו במערכת הביקושים הנתונה והביעו את הכמות אותה מוכרת כל פירמה כפונקציה של המחירים שנקבעו על ידי שתייהן (במידה ולא טעיתם, תקבלו את מערכת הביקושים המופיעה בשקף 24). מה יהיו הכמויות, המחירים והרווחים בשיווי משקל שיתקבל (מודל ברטראנד עם מוצרים מובדלים)?

ג. השוו בין שני הפתרונות. מהו אופי התחרות שיעדיפו הצופים במשחק ומהו אופי התחרות המועדף על הפירמות?

שאלה 2

בענף מסוים פועלים שני יצרנים המוכרים מוצרים שהם תחליפים קרובים, אך אינם זהים. פונקציות הביקוש בפני היצרנים הן:

$$Q_1 = \frac{P_2}{P_1^2}; Q_2 = \frac{P_1}{P_2^2}$$

שני היצרנים מייצרים את המוצר בהוצאה שולית קבועה של 5 ש"ח ליחידה. כל יצרן בוחר במחיר האופטימאלי בהנחה שמחיר היריב נשאר קבוע.

א. שרטטו את שתי עקומות התגובה (במישור (P_1, P_2)).

ב. מה יהיו הכמויות, המחירים והרווחים בשיווי משקל שיתקבל (מודל ברטראנד עם מוצרים מובדלים)?

שאלה 3

בענף ישנן שלוש פירמות המוכרות מוצרים מובדלים ומתחרות במחירים. פונקציית ההוצאות של כל פירמה הינה: $C(q_i)=0$.

מערכת הביקושים העומדת לפני הפירמות הינה:

$$Q_1=160-3P_1+P_2+P_3$$

$$Q_2=160-3P_2+P_1+P_3$$

$$Q_3=160-3P_3+P_1+P_2$$

- א. מה יהיו הכמויות, המחירים והרווחים בשיווי משקל שיתקבל (מודל ברטראנד עם מוצרים מובדלים)?
- ב. הניחו שפירמות 2 ו-3 מתמזגות. מה יהיו הכמויות, המחירים והרווחים בשיווי משקל החדש שיתקבל?
- ג. האם הפירמות הרויחו מהמיזוג? מה ה"סיבה" להשפעה השונה של המיזוג במצב של תחרות במחירים לעומת תחרות בכמויות?

שאלה 4

עקומת הביקוש לרכיב אלקטרוני ניתנת על ידי:

$$P = 300 - Q \quad 0 < Q < 50$$

$$P = 400 - 3Q \quad Q > 50$$

עקומת סך ההוצאות היא: $TC = 250 + 50Q + Q^2$

- א. שרטטו את עקומת הביקוש, הפדיון השולי וההוצאות השוליות של הפירמה, כאשר התפוקה נמדדת על הציר האופקי.
- ב. מהו הסבר אפשרי עבור צורה זו של הביקוש?
- ג. מהם המחיר והכמות שתקבע הפירמה?
- ד. מהו התחום בו יכולות ההוצאות השוליות של הפירמה לנוע בלי שהפירמה תשנה את הכמות והמחיר? הסבירו את תשובתכם.

שאלה 5

הניחו שהצרכנים ממוקמים באופן אחיד לאורך רחוב שאורכו 240 מטר. מכבסת "רמי" ממוקמת במרחק 60 מטר מהקצה השמאלי של הרחוב, ומכבסת "ריטה" ממוקמת במרחק 30 מטר מהקצה הימני של הרחוב. העלות השולית לכביסה הינה 40. כל צרכן זקוק לכביסה אחת בלבד, ותועלתו מכביסה במחיר P אצל יצרן המרוחק A מטרים ממוקם מגוריו הינה: $6000-P-2A$.

- א. מהם הכמויות והמחירים שיקבעו בשיווי משקל (מודל הוטלינג), ומה יהיו רווחי המכבסות?
- ב. הניחו כעת שרמי עוזב את העיר ומשאיר הוראה חד משמעית למנהל המכבסה לקחת מחיר 550 עבור כל כביסה. לאור זאת מה יהיה המחיר שריטה תקבע ומה יהיו הכמויות והרווחים של כל מכבסה? האם אתם מופתעים מהכוון בו השתנו הרווחים?

שאלה 6

סביב ככר עגולה בהיקף של 9,000 מ' מתגוררים תשעים משקי בית במרחקים שווים זה מזה, משפחה כל 100 מ'. שלש פיצריות המוכרות פיצות זהות ממוקמות סביב אותה ככר במרחקים שווים זו מזו: חנות א' ממוקמת ליד בית מס' 1; חנות ב' ממוקמת 3,000 מ' מימין לחנות א'; וחנות ג' ממוקמת באמצע בין שתי החנויות האחרות, במרחק 3000 מ' משתייהן. כל משק בית קונה פיצה אחת כל שבוע, בלי קשר למחיר, וקונה מהמקום הזול ביותר, כשהוא לוקח בחשבון את העלות הכוללת של הקניה: מחיר הפיצה בחנות ועוד הוצאות משלוח (שנקבעו על ידי גורם חיצוני) בגובה 1 ש"ח לכל 100 מ' מרחק בין החנות למשק הבית. עלות הייצור של פיצה היא 10 ₪.

א. מהי פונקציית הביקוש העומדת בפני חנות ב', בהינתן מחירי שתי החנויות האחרות?

ב. בהנחה שכל חנות מתייחסת למחירי החנויות האחרות כנתונים, מהו מחיר שווי המשקל בטווח הקצר? כיצד מתחלק השוק בין שלש החנויות, וכמה מרוויחה כל חנות?

ג. רוסיני, עולה חדש מאיטליה, החליט לפתוח פיצריה נוספת סביב אותה ככר, בדיוק באמצע הדרך בין חנויות א' ו-ב'. בהנחה שהפיצריות הקיימות ממשיכות לפעול ואינן משנות את מיקומן או את מחיריהן, מהי עקומת הביקוש העומדת בפניו?

ד. אם ההוצאה הקבועה של חנות היא 600 ₪ לשבוע, האם כדאי לרוסיני להיכנס לשוק?

תרגיל 8

תורת המשחקים

שאלה 1

רותי ויורם יכולים להקדיש זמן לטיפוח הפרק השכונתי. כל אחד מהם יכול להשקיע 1, 2 או 3 שעות. אם רותי משקיעה x שעות ויורם משקיע y שעות אזי ההנאה שלהם מהפרק הינה $(x+y)^{0.5}$. מכיוון שכל אחד מהם "סובל" מהשקעת הזמן בטיפוח, ההנאה הכוללת של רותי היא $(x+y)^{0.5} - x$ וההנאה הכוללת של יורם הינה $(x+y)^{0.5} - y$.

א. תארו נתונים אלו באמצעות משחק בצורה אסטרטגית. כלומר השלימו את הטבלה הבאה:

יורם / רותי	1	2	3
1			
2			
3	-1 , 1		

ב. חשבו את שיווי המשקל באסטרטגיות דומיננטיות של משחק זה.

שאלה 2

מונופול מייצר מוצר x בעלות שולית קבועה של 10 ש"ח ליחידה (ללא הוצאות קבועות). הביקוש השנתי למוצר הוא: $p_x = 50 - x / 2$. בעבור תשלום שנתי של 550 ₪ יכול המונופול לרכוש טכנולוגיה חדשה שבעזרתה ניתן לייצר את x בעלות שולית אפס.

א. האם כדאי למונופול, בתנאים הקיימים, לאמץ את הטכנולוגיה החדשה?

בהמשך מסתבר למונופול, שמתחרה פוטנציאלית שוקלת כניסה לענף. למתחרה החדשה עלות זהה לזו של המונופול, אך היא אינה יכולה לרכוש את הטכנולוגיה החדשה. ברור לכל, שאם תיכנס המתחרה החדשה לענף היא תראה במונופול הקיים פירמה מובילה הקובעת כמות, והמונופול הקיים יודע זאת ויתפקד בהתאם.

- ב. חשבו מטריצת תשלומים של משחק לא שיתופי שבו האסטרטגיות של המונופול הקיים הן: לאמץ או לא לאמץ את הטכנולוגיה; והאסטרטגיות של המתחרה החדשה הן: להיכנס או לא להיכנס לענף.
- ג. נתחו את המשחק ומצאו אם יש לו שווי משקל Nash (באסטרטגיות טהורות). הסיקו מכך לגבי כדאיות רכישת הטכנולוגיה החדשה למונופול הקיים וכדאיות הכניסה לענף למתחרה החדשה.
- ד. כמה שווה הטכנולוגיה החדשה למונופול הקיים? (מהו התשלום המקסימאלי שכדאי לו לשלם תמורתה)?

שאלה 3

חשבו את כל נקודות שיווי משקל Nash (באסטרטגיות טהורות) של המשחק:

אהוד / ציפי	L	M	R
T	-13, -8	-1, -4	7, -4
M	-4, -1	4, -1	4, -4
B	1, 2	1, -1	1, -4

תרגיל 9

אינפורמציה אסימטרית

שאלה 1

עובד טוב יכול לייצר 25 יחידות תפוקה בפירמה, בעוד שעובד רע יכול לייצר 15 יחידות תפוקה בפירמה. הנאתו של עובד טוב מפנאי (לחילופין ייצור ביתי) הינה 18, בעוד שהנאתו של עובד רע מפנאי הינה 10. אחוז העובדים הרעים באוכלוסייה הינו a . במשק יש הרבה פירמות שמוכרות את תפוקת העובד במחיר 1, ומתחרות על העובדים במתן הצעות שכר w .

- מה יהיה סוג העובדים שיועסקו ומה השכר שיקבל עובד מכל סוג, אם $a=0.8$?
- מה יהיה סוג העובדים שיועסקו ומה השכר שיקבל עובד מכל סוג, אם $a=0.6$? האם יש יותר משיווי משקל אחד?
- מה יהיה סוג העובדים שיועסקו ומה השכר שיקבל עובד מכל סוג, במקרה של אינפורמציה מלאה?
- השוו את התוצאות בסעיפים הקודמים מבחינת יעילות ההקצאה המתקבלת.

שאלה 2

הניחו כי בשוק המכוניות המשומשות ישנן מכוניות טובות, ומכוניות בינוניות. מכונית טובה שווה 3,000 לקונה ו - 2,000 למוכר. מכונית בינונית שווה 1,500 לקונה ו - 1,000 למוכר. ישנו מוכר אחד והרבה קונים. נסמן ב - a את אחוז המכוניות הבינוניות.

- מה יהיה סוג המכונית הנמכרת ובאיזה מחיר, בשיווי משקל שיתקבל? (יש להבדיל בין ערכים שונים של a)

הניחו כעת כי המוכר יכול לקחת את המכונית למכון בדיקה. הבדיקה עולה B , ובסיומה מקבלים אישור על איכות המכונית.

- הניחו ש - $a=0.5$, ותארו מה יהיה סוג המכוניות הנמכרות ובאיזה מחיר, ומי המוכרים שייקחו מכונית לבדיקה, בשיווי משקל שיתקבל. (יש להבדיל בין ערכים שונים של B)

- הניחו שאין אפשרות לבדיקה וכי בשוק יש גם מכוניות גרועות. מכונית גרועה שווה 1000 לקונה ו - 500 למוכר. מה יהיה סוג המכוניות הנמכרות ובאיזה מחיר, אם 30% מהמכוניות גרועות, 40% בינוניות ו - 30% טובות?

שאלה 3

במשק 10,000 פרטים, ולכל פרט מכונית בשווי 100,000 ש"ח. ל-5,000 מהם הסתברות של 30% שמכוניתם תיגנב השנה, ולשאר ה-5,000 הסתברות של 10% שמכוניתם תיגנב. כל פרט מכיר את ההסתברויות האלה ויודע לאיזו קבוצה הוא שייך. חברת הבטוח מכירה את ההסתברויות אך אינה יודעת להבדיל, מי שייך לאיזו קבוצה. כל אחד מהפרטים (בשתי הקבוצות) מוכן לשלם פרמיית סיכון של 5% מערך הנכס, מעבר לביטוח הוגן, כדי לבטח את רכבו ביטוח מלא. האם תרצה חברת הביטוח לבטח את כל האוכלוסייה? חלקה? איזו פרמיה תבקש? ומי ירכוש ממנה ביטוח?

שאלה 4

האיכות (q) של מכונית משומשת מתפלגת באופן אחיד על הקטע $[0, 20,000]$. מכונית מאיכות q שווה למוכר q ולקונה $1.25q$. הניחו כי יש מוכר אחד והרבה קונים.

- האם תתבצע מכירה של המכונית ומה יהיה המחיר בו תתבצע עסקת המכירה אם יש אינפורמציה מלאה למוכר ולקונה?
- האם תתבצע מכירה של המכונית ומה יהיה המחיר בו תתבצע עסקת המכירה אם האינפורמציה היחידה שיש למוכר ולקונה היא כי איכות המכונית מתפלגת באופן המתואר בשאלה?
- האם תתבצע מכירה של המכונית ומה יהיה המחיר בו תתבצע עסקת המכירה אם המוכר יודע את טיב המכונית, והקונה יודע כי איכות המכונית מתפלגת באופן המתואר בשאלה?
- השוו את התוצאות בסעיפים הקודמים מבחינת יעילות ההקצאה המתקבלת.

שאלה 5

מכונית מאיכות q עומדת למכירה. יש מוכר אחד וקונים רבים. שווי מכונית מאיכות q למוכר הוא $q+200$ ולקונה הוא $q+1000$. המוכר יודע את איכות המכונית, והקונה יודע כי איכות המכונית מתפלגת באופן אחיד על הקטע $[0, 8,000]$.

- האם תתבצע מכירה של המכונית, ומה יהיה המחיר בו תתבצע עסקת המכירה?
- הניחו כי קיימת אפשרות לקחת את המכונית למכון בדיקה ובעלות של 400, לקבל אישור על איכות המכונית. הניחו כי כל מוכר שאיכות מכוניתו קטנה או שווה ל-800 אינו הולך למכון הבדיקה, וכל מוכר שאיכות מכוניתו גדולה מ-800 הולך למכון בדיקה. במצב זה חשבו את מחירה של מכונית שנלקחה למכון בדיקה ואת מחירה של מכונית שלא נלקחה למכון בדיקה, והראו כי כל מכונית נמכרת. האם פרט שלא לקח את מכוניתו לבדיקה מצטער על כך?
- דרגו את שני הסעיפים הקודמים מבחינת יעילות התוצאה המתקבלת.

שאלה 6

כל משפחה בראשון לציון נוהגת לקנות, בכל שבוע, בקבוק יין אחד לכל היותר. בקבוק יין מאופיין על ידי איכותו, q ובין תושבי ראשלי"צ 20% הם אניני טעם המוכנים לשלם $p = 10q$ בעבור בקבוק באיכות q ואילו שאר התושבים בעלי טעם רגיל ומוכנים לשלם רק $p = 6q$ בעבור בקבוק יין באיכות q . עלות הייצור של בקבוק יין מאיכות q היא q^2 (זו העלות לבקבוק בכל כמות של בקבוקים שמייצרים).

- הניחו שיש בראשלי"צ רק יקב אחד הפועל כמונופול, הוא מכיר את העדפותיה של כל משפחה ויכול להפלות במחיר בין הפרטים השונים. כמה בקבוקים מאיזו איכות ייצר, בכמה ימכור כל בקבוק וכמה ירוויח?

- ב. הניחו עתה שאותו יקב יחיד אינו מכיר את העדפותיה של כל משפחה (אך מכיר את התפלגות ההעדפות באוכלוסייה) ויכול להציע רק צירוף אחד של מחיר ואיכות. כמה בקבוקים מאיזו איכות ייצר, בכמה ימכור כל בקבוק וכמה ירוויח?
- ג. כמו בסעיף הקודם, אך ביכולתו של היקב למכור בקבוקים באיכויות (ובמחירים) שונים. כמה בקבוקים מאיזו איכות ייצר, בכמה ימכור כל בקבוק וכמה ירוויח? על מנת לפתור סעיף זה יש למצוא צירופי מחיר ואיכות "מפרידים", שיניעו את הקונים האנינים לקנות את היין היקר ואת שאר הקונים לקנות את היין הזול; לחשב את רווחי היקב; ולהשוותם לרווחיו בסעיף ב'.

שאלה 7

הניחו כי כל פרט עשוי להיות בעל יכולת גבוהה או בעל יכולת נמוכה. פרט בעל יכולת גבוהה מייצר 30 יחידות ביום בעוד שפרט בעל יכולת נמוכה מייצר 10 יחידות ביום. שלושים אחוז מהפרטים הם בעלי יכולת גבוהה. העדפותיו של פרט בעל יכולת גבוהה ניתנות על ידי $30W^{0.5} - e^2/30$ ושל פרט בעל יכולת נמוכה, $30W^{0.5} - e^2/10$ כאשר W הנו השכר אותו מקבל הפרט ו- e הנו מספר שנות הלימוד של הפרט. המעסיקים מתחרים על הפרטים באמצעות מתן הצעות שכר, ורווחיהם בשיווי משקל הנם אפס. המעסיקים אינם יודעים מהי יכולתו של הפרט, אך רואים את מספר שנות הלימוד אותן בחר הפרט ללמוד.

- א. תארו שיווי משקל בו פרטים שונים בוחרים רמות השכלה שונות ומקבלים שכר שונה ("שיווי משקל מפריד").
- ב. תארו שיווי משקל שבו פרטים משני הסוגים בוחרים אותה רמת השכלה ומקבלים אותו שכר ("שיווי משקל מאחד (מאגם)").

שאלה 8

האחים כהן, הבעלים של חברת "אומגה" ביקשו לערוך חוזה אישי חדש למנהל החברה, מר לוי. מתוך ניסיון העבר למדו שרווחי החברה תלויים במאמץ שמשקיע המנהל בעבודתו, אם כי עדיין נותר מקום להשפעות אקראיות. הם מעריכים, שבשנה שהמנהל איננו עושה מאמץ מיוחד רווחי החברה הם מיליון ש"ח בשנה, ובשנה שהמנהל עושה מאמץ מיוחד יש סיכוי של 50% להכפיל את הרווח (וסיכוי של 50% שהרווח יישאר ללא שינוי, ברמה של מיליון ש"ח).

אין לבעלי החברה אפשרות לעקוב אחר המנהל ולהבחין מה דרגת המאמץ שלו, אך הם מכירים את פונקציית התועלת שלו.

אם נסמן ב- W את שכרו של המנהל, ונציין באות M אם השקיע מאמץ מיוחד או לא ($M=1$ אם כן, ו-0 אם לא), תועלתו של מר לוי נתונה על ידי:

$$U(W, M) = \ln W - M \ln 2$$

עוד ידוע שמר לוי יכול להרוויח 100,000 ש"ח בשנה בחברה אחרת ללא מאמץ מיוחד. בעלי החברה אדישים לסיכון, וחווה העסקה, יכול להיות מותנה בתוצאות העסקיות של החברה, אך לא בדרגת המאמץ שהמנהל משקיע.

נסמן ב- W_1 את שכרו של מר לוי אם תרוויח החברה מליון ₪, וב- W_2 את שכרו אם היא תרוויח שני מיליון ₪.

- א. נסחו תנאי על W_1 ו- W_2 , המבטיח שמר לוי ירצה להשקיע מאמץ מיוחד.

ב. נסחו תנאי, שאם W_1 ו- W_2 עומדים בו, מר לוי לא ירצה לעבור לעבוד בחברה אחרת.

ג. חשבו את מערכת השכר המביאה למקסימום את הרווחים של בעלי החברה (השוו בין רווחי החברה כשהמנהל מתמרץ להתאמץ לבין רווחיה כשהוא מקבל שכר קבוע)

תרגיל 10

השפעות חיצוניות וטרגדיית הרכוש הציבורי

שאלה 1

מפעל הפועל בתנאי תחרות ומייצר את X ממוקם במעלה נהר. בתהליך הייצור של המפעל נוצרת פסולת (Z) המזהמת את המים ומקטינה את תפוקת הדייגים (Y) העובדים במורד הנהר. פונקציית ההוצאות של המפעל ניתנת על ידי $C^X(X)$, פונקציית ההוצאות של הדייגים ניתנת על ידי $C^Y(Y,Z)$ ומחירי המוצרים ניתנים על ידי P_X ו- P_Y . הניחו שכמות הפסולת ניתנת על ידי $Z(X)$ ואין אפשרות לשנות אותה.

- א. מהי ההקצאה התחרותית? יש להציג את תנאי הסדר הראשון אותם היא מקיימת, ולהראות כיצד נקבעות הכמויות של X ו- Y בשתי מערכות צירים נפרדות (מחיר המוצר יופיע על הציר האנכי והכמות על הציר האופקי). האם היא פארטו יעילה? מהו כוון העיוות במידה והוא קיים?
- ב. מהם השינויים שיחולו בתשובה לסעיף הקודם כאשר הפירמות מתאחדות? האם ההקצאה המתקבלת תהיה פארטו יעילה?
- ג. הניחו כי מוצע שהמפעל ישלם לדייגים פיצוי t עבור כל יחידת זיהום. מהו הפיצוי שיביא להקצאה פארטו יעילה?
- ד. הניחו כי מוצע שהדייגים ישלמו למפעל s עבור הקטנת הייצור מרמת הייצור התחרותית. מהו התשלום שיביא להקצאה פארטו יעילה? האם יש הבדל בין תשובה זו לתשובתך על הסעיף הקודם? במה שונה הצעה זו ממס פיגוביאני?
- ה. בדיון על ההצעות שבשני הסעיפים הקודמים, הושמעה טענה שלא קיים תשלום מהסוגים המוצעים בהם שיביא ליצור פארטו יעיל בטווח הארוך. חוו דעתכם.

הניחו כעת שהמפעל יכול להקטין את כמות הפסולת. פונקציית העלות של המפעל כעת ניתנת על ידי: $C^X(X,Z) = C^X_1(X) + C^X_2(Z(X)-Z)$ כאשר $Z \leq Z(X)$ הינה כמות הפסולת למעשה, הפונקציה C^X_2 מתארת את העלות הכרוכה בהקטנת הזיהום והפונקציה C^X_1 מתארת את העלות לייצור X .

- ו. הראו שההקצאה המתקבלת בשיווי משקל תחרותי אינה פארטו יעילה וכי הקטנת הזיהום תאפשר להגדיל הן את תפוקת המפעל והן את תפוקת הדייגים.
- ז. הוצע להטיל מס t על זיהום. מהו המס שיש להטיל על המפעל כדי להגיע להקצאה פארטו יעילה? כיצד תשתנה תפוקתו של המפעל?
- ח. לחילופין, הוצע להטיל מס על תפוקת המפעל במטרה להקטין את התפוקה ובעקבות כך את הזיהום. הסבירו מדוע מס כזה לא יביא להקצאה פארטו יעילה.

שאלה 2

שני מפעלים סמוכים זה לזה מייצרים X ו- Y . הפירמה המייצרת את X פולטת בתהליך היצור זהום (Z), כאשר כמות הזיהום הנפלטת ללא טיפול היא: $Z = 0.1X$. פירמה זו יכולה להקטין את הזיהום על ידי טיפול בשפכים. פונקצית ההוצאות שלה היא: $C^X(X,Z) = 2X^2 + 100(0.1X - Z)^2$ עבור $Z < 0.1X$. הפירמה השנייה נפגעת מן הזיהום. פונקצית ההוצאות שלה היא: $C^Y(Y,Z) = 0.5(Y + 5Z)^2$. הפירמות פועלות בתנאי תחרות במחירים קבועים $P_Y = 100, P_X = 400$.

- א. חשבו את הכמויות המיוצרות של X ושל Y ואת רווחי כל אחת מהפירמות בפתרון התחרותי.
- ב. חשבו את הכמויות המיוצרות, הזיהום והרווחים של פירמה המאגדת את שני המפעלים. הראו באופן גראפי כיצד מתקבלת רמת הזיהום הפארטו יעילה.
- ג. מהו שעור המס שיש להטיל, על מי ומה, כדי שהפירמות תייצרנה כמויות פארטו יעילות?
- ד. בעקבות טענה שקשה למדוד את רמת הזיהום, הוחלט להטיל על המפעל המזהם מס בשיעור קבוע ליחידת X , באופן שכמות הזיהום תשווה לזו שהתקבלה בסעיף ב. מהו שעור המס? האם יביא ליצור פארטו יעיל? הסבירו.

שאלה 3

יזם המתכנן מפעל לחומרי הדברה מצא וקבע את התפוקה הרצויה של המפעל ואת גורם היצור המשתנה. הבעיה שנוטרה היא מיקומו של המפעל. מפעל זה מזהם את האויר בחומרים רעילים, אך הרחקתו מהעיר תגדיל את הוצאות ההובלה. הוצאות ההובלה הן: $C = Y^2$ כאשר Y הוא המרחק בק"מ ממרכז העיר. צוות מחקר שעסק בנושא הזיהום חישב ומצא שההוצאות הנגרמות לתושבי העיר עקב הזיהום הן $16/Y$.

- א. כיצד ימקם היזם את המפעל משיקולי רווח?
- ב. היכן יש למקם את המפעל משיקולי רווחה כוללים?
- ג. ראש העיר הציע למפעל מענק שנתי של F ש"ח עבור כל ק"מ בו יתרחק המפעל ממרכז העיר. מהו ה- F שיביא לתוצאה פארטו יעילה?

שאלה 4

שוויה של תפוקת הדיג באגם "HIAWATHA" תלוי במספר סירות הדיג הנכנסות לאגם (B) וניתן על ידי: $f(B)=60B-2B^2$. עלותה של סירה הינה 12.

- א. מהו מספר הסירות הפארטו יעיל באגם?
ב. מהו מספר הסירות באגם בפתרון התחרותי?

הניחו כעת כי קיים התקן שעלותו 20 כך שאם יש באגם B_1 סירות עם ההתקן ו B_2 סירות בלי ההתקן שוויה של תפוקת הדיג באגם "HIAWATHA" יהיה: $f(B_1, B_2)=60(B_1+B_2)-2B_1^2-B_2^2$. כלומר הרווחים הכוללים מפעילות הדיג יינתנו על ידי: $60(B_1+B_2)-2B_1^2-B_2^2-20B_1-12(B_1+B_2)$.

- ג. מהם מספרי הסירות היעילים עם ובלי התקן באגם?
ד. הניחו כי נקודת המוצא הינה סעיף ב', בו מצאתם פתרון תחרותי. האם במצב כזה יהיה כדאי לסירה בודדת באגם לרכוש את ההתקן? (הניחו כי סך תפוקת הדיג מתחלק שווה בשווה בין כל הסירות)
ה. התעלמו כעת מנושא ההתקן, וחשבו את רשיון הדיג שיביא למספר סירות פארטו יעיל באגם.

שאלה 5

בשנת 2010 הסתיימה בניית הכביש "חוצה ישראל" והקטע בין חיפה לבאר שבע נפתח לתנועה ככביש אגרה. זמן הנסיעה בכביש זה (בדקות) t תלוי במספר המכוניות N לפי הנוסחה: $t = 100 + N/50$. לכל מכונית קיימת אפשרות להגיע מחיפה לבאר שבע גם בכבישים חלופיים שנפח התנועה בהם אינו מוגבל, ומשך הנסיעה בהם 360 דקות. הניחו שבכל מכונית אדם אחד, וכי עלות הזמן של כל אדם היא 0.50 ש"ח לדקה. כמו כן, הניחו שניתן להתעדכן בכל עת לגבי מספר המכוניות הנוסעות בכביש האגרה באותו רגע.

- א. כמה מכוניות תסענה בכביש חוצה ישראל אם לא תוטל אגרה? מה יהיה זמן הנסיעה?
ב. מהו מספר המכוניות שישע בכביש חוצה ישראל בפתרון פארטו יעיל?
ג. מהו גובה האגרה שיש להטיל על שימוש בכביש חוצה ישראל כדי להגיע להקצאה פארטו יעילה?
ד. הניחו עתה שלאנשים שונים עלויות זמן שונות והתייחסו באופן איכותי לסעיפים א' ו – ב'.

שאלה 6

קיימות כעת שתי דרכים להגיע מלוד לתל אביב רכבת פרברים ונתיבי איילון. זמן הנסיעה ברכבת הינו 1 שעה. זמן הנסיעה בנתיבי איילון תלוי במספר המכוניות (N) בכביש וניתן על ידי:
 $T(N)=0.3+0.01N$. (הניחו שעלות הזמן של כל הפרטים זהה ושווה ל-1).

- א. מהו מספר המכוניות הפארטו יעיל בכביש?
- ב. מהו מספר המכוניות בכביש בפתרון התחרותי?
- ג. הניחו כעת כי ישנם שני סוגי פרטים. עלות הזמן של פרטים מסוג α הנה 1 ועלות הזמן של פרטים מסוג β הנה 2. הניחו כי יש 10 פרטים מסוג β ו- 200 פרטים מסוג α . סמנו את מספרי המכוניות עם פרטים מסוג α וסוג β שנוסעים בכביש ב- N_α ו- N_β בהתאמה. הראו כי בפתרון היעיל (הפתרון שמביא למינימום את סך העלות להעברת הפרטים מלוד לתל אביב) ייסעו כל הפרטים מסוג β בכביש (כלומר $N_\beta=10$). חשבו כמה פרטים מסוג α ייסעו בכביש בפתרון היעיל.
- ד. התעלמו כעת מסעיף ג', וחשבו את גודל האגרה (על נסיעה בכביש) שיביא למספר מכוניות פארטו יעיל בכביש.

תרגיל 11

מוצרים ציבוריים

שאלה 1

הניחו כי במשק יש שני צרכנים (A ו-B) ושני מוצרים (X ו-Y), כאשר X מוצר ציבורי טהור ו-Y מוצר פרטי. עקומת התמורה של המשק נתונה ע"י $Y = 150 - 2X$. פונקציות התועלת של הפרטים נתונות ע"י: $U_A = X^2 Y_A$, $U_B = X Y_B$. האם ההקצאה $X = 50$, $Y_A = 25$, $Y_B = 25$ פארטו יעילה? במידה והתשובה שלילית הסבירו כיצד ניתן להשיג שיפור פארטו.

שאלה 2

משק מייצר שני מוצרים X, Y. במשק שני פרטים עם פונקציות תועלת $U_1 = X_1 Y$, $U = X_2 Y$, כאשר Y היא הכמות הכללית המיוצרת של מוצר Y; X_1 ו- X_2 הן הכמויות של מוצר X הנצרכות על ידי שני הפרטים, כאשר: $X_1 + X_2 = X$. פונקציות הייצור הן $Y = \beta a$, $X = \alpha a$, כאשר a הוא גורם הייצור המשמש בייצור שני המוצרים וכמותו הכוללת במשק היא A.

- חשבו את עקומת התמורה של המשק.
- מהו התנאי לפארטו-יעילות? מהי רמת הייצור היעילה?
- הניחו שלכל פרט יש $A/2$ יחידות של גורם הייצור. מה תהיה ההקצאה התחרותית במשק?

שאלה 3

ברחוב מתגוררים עשרה אנשים. כל אחד מוכן לשלם 2 ₪ עבור כל פנס רחוב. עלות הצבת X פנסים היא $C(X) = X^2$. מהו מספר הפנסים הפארטו יעיל?

שאלה 4

הניחו כי במשק יש מאה פרטים, לכל פרט יש T שעות של זמן. נסמן ב- t_i את מספר שעות ההתנדבות של פרט i למשמר האזרחי. כמות שירותי הביטחון X פרופורציונאלית לסכום השעות

שתרמו הפרטים: $X = K \sum_{i=1}^{100} t_i$ כאשר K גודל קבוע.

פונקצית התועלת של כל אחד מהפרטים היא: $U = \ln X + \ln (T - t_i)$

- הניחו שכל אחד מהפרטים ממקסם את רווחתו בהתייחסו לשעות ההתנדבות שהפרטים האחרים כגדלים קבועים. כמה זמן יקדיש כל פרט למשמר האזרחי,

- בשיווי המשקל שיתקבל? מה תהיה רמת הביטחון X שתיוצר במשק?
- ב. עתה נניח שיש ממשלה שיכולה לחייב את הפרטים להקדיש זמן למשמר האזרחי, והיא מעוניינת להביא למקסימום את סך התועלת במשק. איזה חלק מזמנו תחייב הממשלה כל פרט ל"התנדב" למשמר האזרחי? מה תהיה רמת הביטחון שתתקבל במשק?
- ג. השוו בין התשובות לסעיפים א' ו - ב'?

שאלה 5

במטולה 1,000 תושבים המפיקים הנאה משתיית בירה ושחייה בבריכה הציבורית של הישוב,

$$U_i(X_i, G) = 4 \ln X_i + \ln G$$

ולכולם אותה פונקצית תועלת : $U_i(X_i, G) = 4 \ln X_i + \ln G$ כאשר X_i הוא מספר בקבוקי הבירה שתושב i שותה בשנה (במטולה אפשר לקנות גם חלקי בקבוק) ו- G הוא גודל בריכת השחייה (במ"ר). המחיר של בקבוק בירה לתושב מטולה הוא שני ש"ח והעלות השנתית של בריכת שחייה היא 200 ש"ח למ"ר . 75% מתושבי מטולה מרוויחים 1000 ש"ח בשנה ו 25% מרוויחים 2000 ש"ח בשנה.

- א. אם היית תושב עני של מטולה, מהו הגודל האופטימאלי של בריכה שהיית רוצה, בהנחה שהבריכה ממומנת על ידי תשלום שווה מכל תושב? הסבירו.
- ב. מה הייתה תשובתך לסעיף א', אם הבריכה הייתה ממומנת על ידי מס הכנסה יחסי על התושבים (כל תושב משלם אחוז זהה מהכנסתו)? הסבירו.
- ג. בהנחה שגודל הבריכה נקבע בהצבעת רוב, איזו שיטת מיסוי למימון הבריכה (תשלום שווה או מס יחסי) עדיפה בעיני תושביה העניים של מטולה ואיזו בעיני תושביה העשירים?