<u>דף סיכום למשוואת סלוצקי (הביקוש הרגיל והביקוש המפוצה)</u>

ד"ר יוסי טובול

נניח פונקצית תועלת :

(1) $u(x,y) = xy$.

על פי המשוואה לעיל נגדיר את הבעיה הדואלית למקסימום התועלת

(2)
$$\begin{aligned} &Min \quad p_x x + p_y y \\ &s.t \ : \ xy = \bar{u} \end{aligned} \ .$$

נפתור את הבעיה (2) לעיל. ראשית, נשווה את יחס המחירים ליחס התועלות השוליות, ונקבל :

(3)
$$MRS_{yx} = \frac{p_x}{p_y} \ \rightarrow \ \frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y} \ \rightarrow \ y = \frac{p_x x}{p_y} \ .$$

נציב את (3) במגבלה של בעיה (2), ונקבל :

(4)
$$x\frac{p_x x}{p_y} = \bar{u} \ \rightarrow \ h^x(p_x, p_y, \bar{u}) = \sqrt{\frac{p_y \bar{u}}{p_x}} \ .$$

נציב את (4) , משוואת הביקוש המפוצה ל- x , ב - (3) ונקבל:

(5)
$$h^y(p_x, p_y, \bar{u}) = \sqrt{\frac{p_x \bar{u}}{p_y}} \ .$$

נציב את הביקוש המפוצה ל - x והביקוש המפוצה ל - y במשוואת המטרה ב- (4), ונקבל את פונקצית ההוצאה :

(6)
$$E(p_x, p_y, \bar{u}) = p_x\sqrt{\frac{p_y \bar{u}}{p_x}} + p_y\sqrt{\frac{p_x \bar{u}}{p_y}} = 2\sqrt{p_x \, p_y \, \bar{u}} \ .$$

כעת נפתור את הבעיה הרגילה, מקסום התועלת בהינתן ההכנסה והמחירים, שהיא:

(7)
$$\begin{aligned} &Max \quad u(x,y) = xy \\ &s.t \ : \ p_x x + p_y y = I \end{aligned} \ .$$

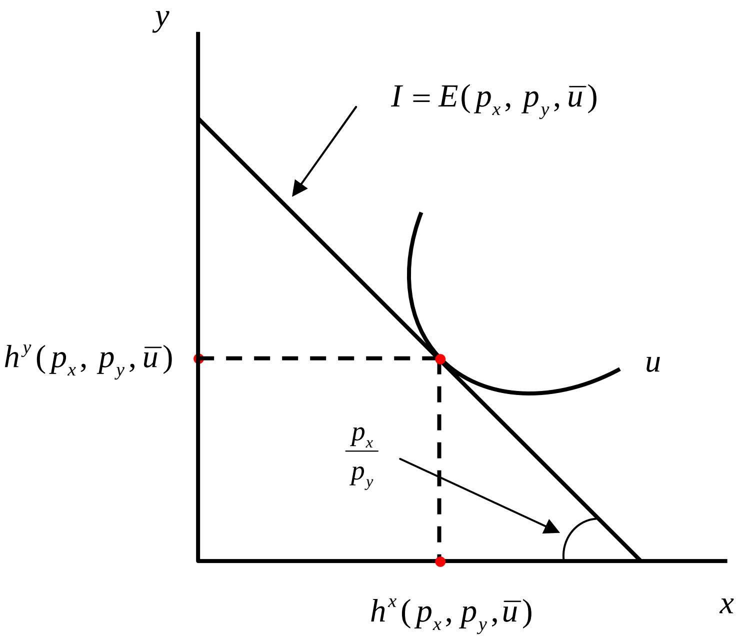
נפתור את הבעיה (7) לעיל. ראשית, נשווה את יחס המחירים ליחס התועלות השוליות כפי שקיבלנו במשוואה (3). נציב את (3) במגבלה של בעיה (7), ונקבל :

$$p_x x + p_y \frac{p_x x}{p_y} = I \quad \rightarrow \quad x(p_x, p_y, I) = \frac{I}{2p_x} . \tag{8}$$

נציב את התוצאה מ – (8) בתוצאה מ- (3) ונקבל:

$$y(p_x, p_y, I) = \frac{I}{2p_y} . \tag{9}$$

נצייר במישור של x ו - y את פתרון שני הבעיות :



כדי למצוא את ההוצאה (ההכנסה) המינימאלית להשגת u, אלא שכעת נסתכל על הבעיה (7) ובמקום הערך I נציב את הביטוי $E(p_x, p_y, \bar{u})$ שמצאנו בבעיה (2). נציב ב- (8) את $E(p_x, p_y, \bar{u})$, ונקבל :

$$x\left(p_x, p_y, E(p_x, p_y, \bar{u})\right) = \frac{E(p_x, p_y, \bar{u})}{2p_x} = \frac{2\sqrt{p_x\, p_y\, \bar{u}}}{2p_x} = \sqrt{\frac{p_y \bar{u}}{p_x}} = h^x(p_x, p_y, \bar{u}) . \tag{10}$$

שימו לב, בזהות, אם גוזרים את שני האגפים ביחס לפרמטר כלשהו, גם אחרי הגזירה מקבלים זהות.

זהויות נוספות :

1. כיוון שפונקצית הביקוש הומוגנית מדרגה 0 אזי :

$$x(p_x, p_y, I) \equiv x(tp_x, tp_y, tI) \ . \tag{11}$$

2. מכיוון שפתרון בעיה (7) נמצא על פני קו התקציב הרי :

$$p_x x(tp_x, tp_y, tI) + p_y y(p_x, p_y, I) \equiv I \ . \tag{12}$$

שימו לב, עבור $(p_x, p_y, \bar{u})$, ההוצאה המינימאלית הינה ערך כלשהו ואת ערך זה מציבים במקום I. פתרון בעיה (7) ייתן את פונקציות הביקוש הרגילות : $x(p_x, p_y, I)$, $y(p_x, p_y, I)$ אך $I = E(p_x, p_y, I)$. כאשר הפתרון של x ו- y תחת שתי הבעיות מתלכד <u>לכל</u> $(p_x, p_y, \bar{u})$. לכן ניתן לרשום כזהות :

$$x\left(p_x, p_y, \underbrace{E(p_x, p_y, \bar{u})}_{I} \right) \equiv h^x(p_x, p_y, \bar{u}) \ . \tag{13}$$

המשמעות הינה שלכל $(p_x, p_y, \bar{u})$ שני הביטויים ב- (13) שווים. נגזור את שני האגפים ביחס ל- p_x את (13) ונקבל :

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} + \frac{\partial x}{\partial I}\frac{\partial E}{\partial p_x} \equiv \left.\frac{\partial x}{\partial p_x}\right|_{u=\bar{u}} \tag{14}$$

מהשילוב של הלמה של שפרד :

$$\frac{\partial E}{\partial p_x} = h^x \ . \tag{15}$$

מקבלים את משוואת סלוצקי :

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} \equiv \left.\frac{\partial x}{\partial p_x}\right|_{u=\bar{u}} - x^* \frac{\partial x}{\partial I} \ . \tag{16}$$

בדרך דומה מקבלים גם :

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} \equiv \left.\frac{\partial x}{\partial p_y}\right|_{u=\bar{u}} - y^* \frac{\partial x}{\partial I} . \quad (17)$$