בעיית הצרכן

אנו מניחים כי הצרכן רציונאלי, כלומר עושה את הטוב ביותר עבורו בהנתן מה שאפשר, או במונחים שלנו, משיא את תועלתו בהנתן מגבלת התקציב. בניסוח מתמטי ניתן לתאר את הבעיה באופן הבא (שימו לב כי בכיתה למדנו x ו- y כאשר כאן $x_1 \equiv x$ ו- $x_2 \equiv y$ וכולי):

$$\max_{x_1,..x_n} u\left(x_1,....x_n\right)$$

$$s.t$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le I \qquad (1)$$

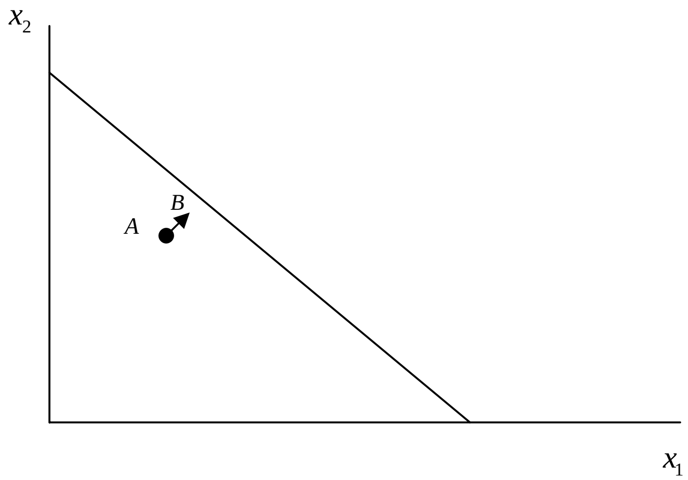
$$x_1,..x_n \ge 0$$

האם לבעיה זו יש פיתרון?

ובכן, אם הסביבה הכלכלית מקיימת את כל האקסיומות וכך גם העדפות הצרכן מובטח לנו כי לבעיית הצרכן יש פיתרון.

האם הצרכן מוציא את כל הכנסתו?

אם העדפות הצרכן מקיימות את הנחת המונוטוניות הצרכן יוציא את כל הכנסתו על צריכת המצרכים:



נניח כי הסל A אופטימאלי ונראה כי הדבר לא יכול להתקיים. כאשר הצרכן קונה את הסל A הוא איננו מוציא את כל הכנסתו ולפיכך הוא יכול לקנות עוד כמות מזערית משני המצרכים וכך להגיע לסל טוב יותר B שעדיין עומד במגבלת התקציב שלו.

אם יחס העדפה של הצרכן מיוצג על ידי פונקציית התועלת

$u(x_1,x_2)=-x_1-x_2$ או לחילופין על-ידי פונקציית התועלת

$u(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}$, כלומר שני המצרכים אינם רצויים, הצרכן יבחר

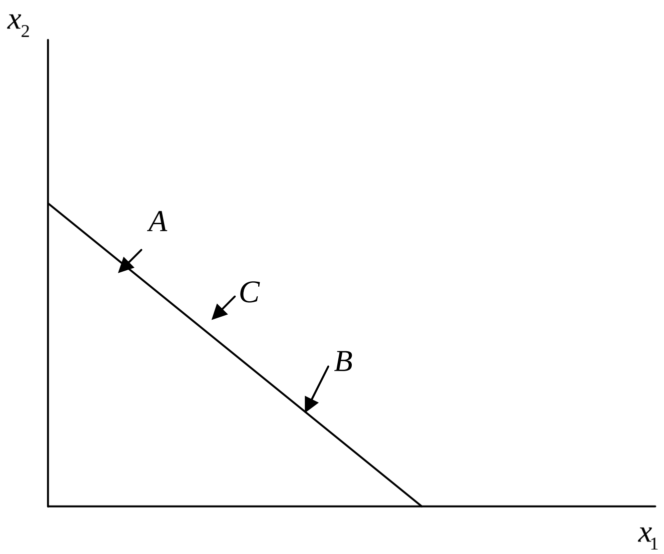
לצרוך את הסל $(0,0)$.

נשים לב כי הפסוק הלוגי בתחילת הנושא מנוסח כ-אם ולא כ- אם ורק אם, כלומר תנאי המונוטוניות איננו מחייב. אם רק אחד מן המצרכים רצוי הצרכן יוציא את כל הכנסתו על מצרך זה. לדוגמא:

$u(x_1,x_2)=x_1-x_2 \Rightarrow (x_1^*,x_2^*)=\left(\frac{I}{p_1},0\right)$, $u(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1+1}-\frac{1}{x_2+1} \Rightarrow (x_1^*,x_2^*)=\left(0,\frac{I}{p_2}\right)$.

האם לבעיית הצרכן פיתרון יחיד?

אם יחס ההעדפה מקיים קמירות חזקה ומונוטוניות חזקה לבעיית הצרכן פיתרון יחיד.



הסלים A ו B אינם יכולים להיות אופטימליים שהרי הסל C נמצא אף הוא על מגבלת התקציב,(מיצוע), והוא טוב מהם, (קמירות חזקה).

נשים לב כי גם תנאי זה לא הכרחי. נראה כי למרות שיחסי ההעדפה המיוצגים על-ידי פונקציות התועלת קוב-דאגלאס ומינימום אינם מקיימים מונוטוניות חזקה וקמירות חזקה יהיה לבעיית הצרכן פיתרון יחיד, גם מן הדוגמאות הקודמות ניתן ללמוד כי יתכן פיתרון יחיד למרות שלא מתקיימות התכונות מונוטוניות חזקה וקמירות חזקה.

נפתור עתה את בעיית הצרכן:

$$L = u\left(x_1, x_2\right) + \lambda\left(I - p_1x_1 - p_2x_2\right) \tag{2}$$

נגזור את משוואה (2) לפי שלושת המשתנים ונקבל את תנאי סדר ראשון לפיתרון פנימי:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = u_1 - \lambda p_1 = 0 \Rightarrow u_1 = \lambda p_1 \tag{3}$$

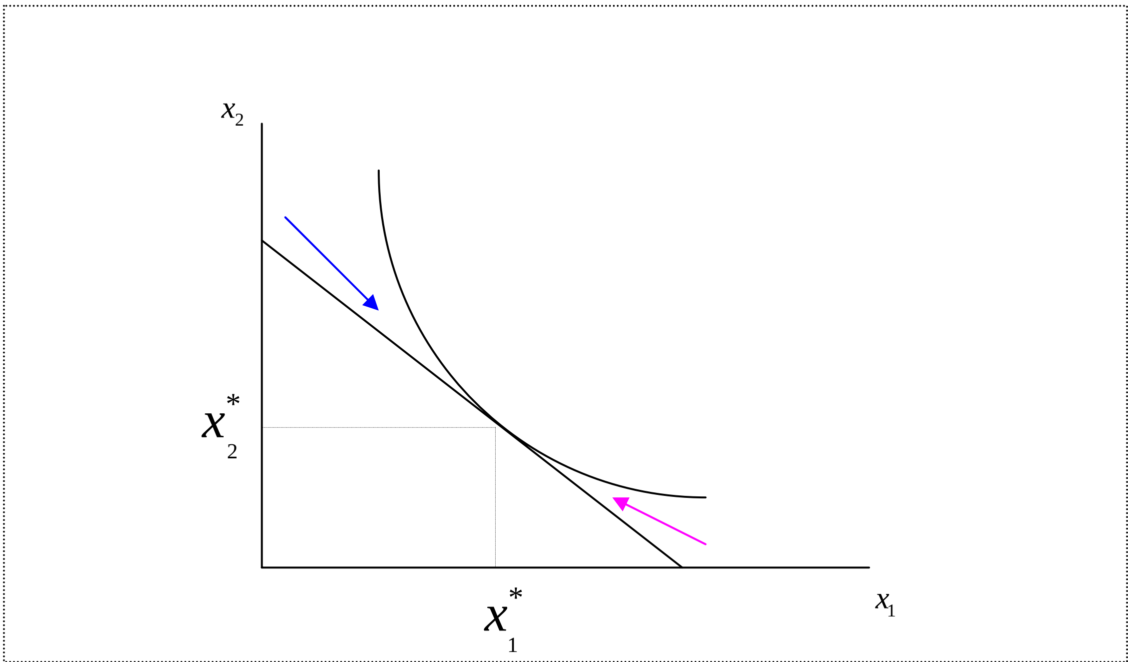
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = u_2 - \lambda p_2 = 0 \Rightarrow u_2 = \lambda p_2 \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \tag{5}$$

על-ידי חלוקתן זו בזו של משוואות (3) ו (4) נקבל את תנאי סדר ראשון לפיתרון פנימי:

$$MRS_{1,2}\left(x_1^*, x_2^*\right) = \frac{u_1\left(x_1^*, x_2^*\right)}{u_2\left(x_1^*, x_2^*\right)} = \frac{p_1}{p_2} \tag{6}$$

ובאופן גרפי:



מהו ההגיון הכלכלי מאחורי תנאי ההשקה?

ראשית נזכור כי הצרכן מוציא את כל כספו.

בצד שמאל למעלה, (החץ הכחול), $MRS_{1,2} > \frac{p_1}{p_2}$ כלומר תמורת קבלתה של יחידה נוספת ממצרך 1 השוק דורש מן הצרכן לוותר על כמות יחידות ממצרך 2 הקטנה מן הכמות המקסימלית עליה הוא מוכן לוותר, לפיכך הצרכן יגדיל את תועלתו אם יגדיל את צריכת מצרך 1 ויקטין את צריכת מצרך 2, (ינוע בכיוון החץ הכחול).

מן הכיוון השני אנו רואים כי $MRS_{1,2} < \frac{p_1}{p_2}$ או $MRS_{2,1} > \frac{p_2}{p_1}$, כלומר ניתן ללמוד כי עתה מצרך 2 "זול" עבור הצרכן ועל-כן יגדיל את תועלתו אם יגדיל את צריכתו ממצרך 2 ויקטין את צריכתו ממצרך 1, (ינוע בכיוון החץ הוורוד).

ראינו כי אם יחס ההעדפה מקיים קמירות חזקה ומונוטוניות חזקה לבעיית הצרכן פיתרון יחיד. הפיתרון יכול להיות פנימי, (צריכת כמות חיובית מכל מצרך), או פיתרון קצה, (הכמות הנצרכת מלפחות אחד המצרכים שווה ל-0). נשאלת השאלה מהם התנאים לפיתרון פנימי יחיד לבעיית הצרכן?

ובכן, התנאים המבטיחים זאת נקראים נקראים תנאי INADA:

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \lim_{x_2 \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_2} = \infty$$

$$\lim_{x_1 \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \lim_{x_2 \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad (7)$$

כלומר $MRS_{1,2}$ שרוע על כל הטווח שבין אפס לאינסוף. מאחר ושיפוע קו התקציב סופי, ברור כי הפיתרון יהיה פנימי.

עד עתה דיברנו על תנאי סדר ראשון למציאת נקודת קיצון, עתה נדבר על תנאי סדר שני. על-מנת שנקודת הקיצון שמצאנו תהיה נקודת מקסימום תועלת בהינתן מגבלת התקציב, ולא מינימום תועלת בהינתן מגבלת התקציב, על עקומה שוות התועלת להיות קמורה ממש בסביבתה של נקודת ההשקה.

נתבונן במספר פונקציות וב $MRS_{1,2}$ שלהן:

$$u(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2 \rightarrow MRS_{1,2}=\frac{2x_1}{2x_2}=\frac{x_1}{x_2} \tag{8}$$

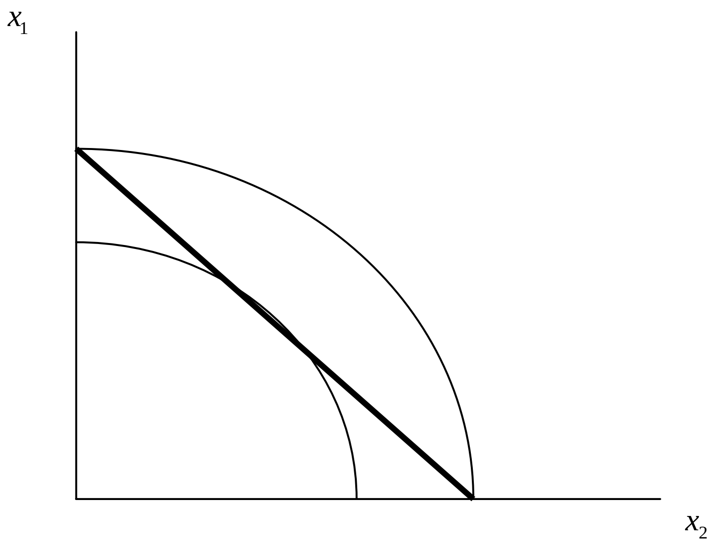
$$u(x_1,x_2)=x_1^2+x_2 \rightarrow MRS_{1,2}=\frac{2x_1}{1}=2x_1 \tag{9}$$

נשים לב כי כאשר כמות מצרך 1 גדלה וכמות מצרך 2 קטנה שיפוע עקומות שוות התועלת גדל, מכאן שמדובר בפונקציות קעורות.

נוסיף עליהן עוד פונקציה קעורה:

$$u(x_1,x_2)=\max\{x_1,x_2\} \tag{10}$$

נדגים בעזרת משוואה (8):



ניתן לראות כי נקודת ההשקה היא הנקודה הגרועה ביותר על מגבלת התקציב. הסל האופטימאלי יהיה על אחת הפינות, (בציור הנ״ל קיימות שתי נקודות אופטימום).

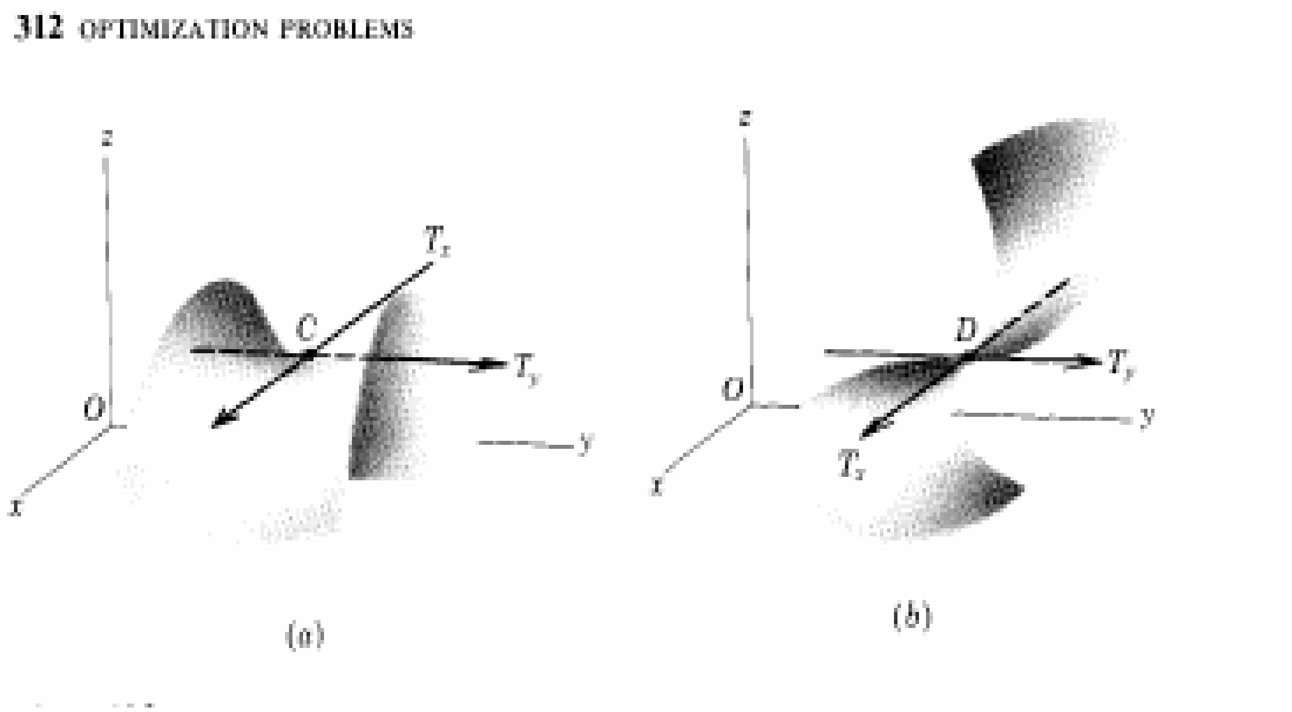
באופן כללי נמצא על ידי הצבה:

$$
\begin{aligned}
&u\left(\frac{I}{p_1},0\right) > u\left(0,\frac{I}{p_2}\right) \Rightarrow x_1^* = \frac{I}{p_1}, x_2^* = 0 \\
&u\left(\frac{I}{p_1},0\right) < u\left(0,\frac{I}{p_2}\right) \Rightarrow x_1^* = 0, x_2^* = \frac{I}{p_2} \\
&u\left(\frac{I}{p_1},0\right) = u\left(0,\frac{I}{p_2}\right) \Rightarrow x_1^* = 0, x_2^* = \frac{I}{p_2} \text{ and } x_1^* = \frac{I}{p_1}, x_2^* = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

נעבור לדוגמא:

$$u(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2, I=100, p_1=2, p_2=1$$
$$u(50,0)=2500<u(0,100)=10000 \Rightarrow x_1^*=0, x_2^*=100$$

לעיתים לא נוכל לזהות בקלות מנוסחת $MRS_{1,2}$ האם העקומה שוות-התועלת קמורה או קעורה. גם אם התועלת השולית מכל מצרך פוחתת לא נוכל לומר בוודאות כי מדובר בפונקציה קמורה ממש:



באיור (a) ניתן לראות נקודת אוכף, מכיוון אחד נקודה C היא נקודת מקסימום ומן השני, הכיוון המופנה אלינו, היא נקודת מינימום. באיור (b) ניתן לראות נקודת פיתול – בנקודה D הנגזרת שווה ל-0 למרות

שזוהי איננה נקודת קיצון. ניתן ללמוד מדוגמאות אלו כי התנאי של תועלת שולית פוחתת מכל מצרך איננו תנאי מספיק לקמירותה של פונקציית התועלת וצריך להסתכל גם על הנגזרות הצולבות. אם לא נצליח לזהות האם הפונקציה קמורה נדרוש מפורשות כי

$$\frac{\partial MRS_{1,2}\left(x_1, x_2\left(x_1\right)\right)}{\partial x_1} < 0 \Rightarrow u_{11}u_2^2 + u_{22}u_1^2 - 2u_1u_2u_{12} < 0$$

נפנה עתה למספר דוגמאות לפיתרון בעיית הצרכן:

קוב-דאגלאס:

$$\begin{aligned} &\max_{x_1, x_2} \; x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \\ &s.t \\ &\qquad p_1x_1 + p_2x_2 \le I \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

מאחר וזוהי פונקציה קמורה נפעיל את תנאי סדר ראשון:

$$MRS_{1,2} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2 = \frac{\beta p_1 x_1}{\alpha p_2}$$

נציב למגבלת התקציב ונקבל:

$$p_1x_1 + \cancel{p_2}\frac{\beta p_1 x_1}{\alpha \cancel{p_2}} = I \Rightarrow x_1\left(p_1 + \frac{\beta p_1}{\alpha}\right) = x_1\left(\frac{\alpha p_1 + \beta p_1}{\alpha}\right) = I$$

$$\Rightarrow x_1^*\left(p_1, p_2, I\right) = \frac{\alpha I}{p_1\left(\alpha+\beta\right)} \Rightarrow x_2 = \frac{\beta \cancel{p_1}}{\cancel{\alpha} p_2}\frac{\cancel{\alpha} I}{\cancel{p_1}\left(\alpha+\beta\right)}$$

$$\Rightarrow x_2^*\left(p_1, p_2, I\right) = \frac{\beta I}{p_2\left(\alpha+\beta\right)}$$

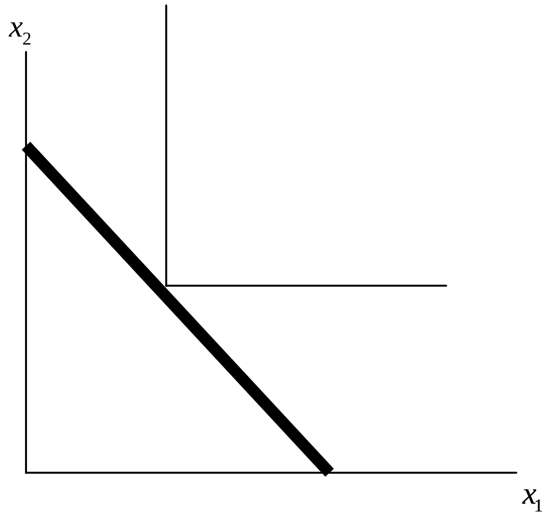
נשים לב כי פיתרון בעיית הצרכן הומוגני מדרגה 0 במחירים ובהכנסה, כלומר, אם המחירים וההכנסה מוכפלים פי גודל זהה קו התקציב לא משתנה ועל-כן גם הפיתרון לא משתנה.

פונקציית מינימום:

$$\max_{x_1, x_2} \quad \min\left\{\alpha x_1, \beta x_2\right\}$$

$$s.t$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le I$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



תנאי האופטימום: $\alpha x_1 = \beta x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{\alpha}{\beta} x_1$.

נציב את תנאי האופטימום למגבלת התקציב וכך נוכל לחלץ את הסל האופטימלי:

$$p_1x_1+p_2\frac{\alpha}{\beta}x_1=I\Rightarrow x_1\left(p_1+p_2\frac{\alpha}{\beta}\right)=x_1\left(\frac{\beta p_1+\alpha p_2}{\beta}\right)=I$$

$$\Rightarrow x_1^*=\frac{\beta I}{\beta p_1+\alpha p_2}$$

$$x_2^*=\frac{\alpha}{\beta}x_1^*=\frac{\alpha}{\cancel{\beta}}\frac{\cancel{\beta}I}{\beta p_1+\alpha p_2}$$

$$\Rightarrow x_2^*=\frac{\alpha I}{\beta p_1+\alpha p_2}$$

הפונקציה הליניארית:

$$\max_{x_1,x_2}\ \alpha x_1+\beta x_2$$

$$s.t$$

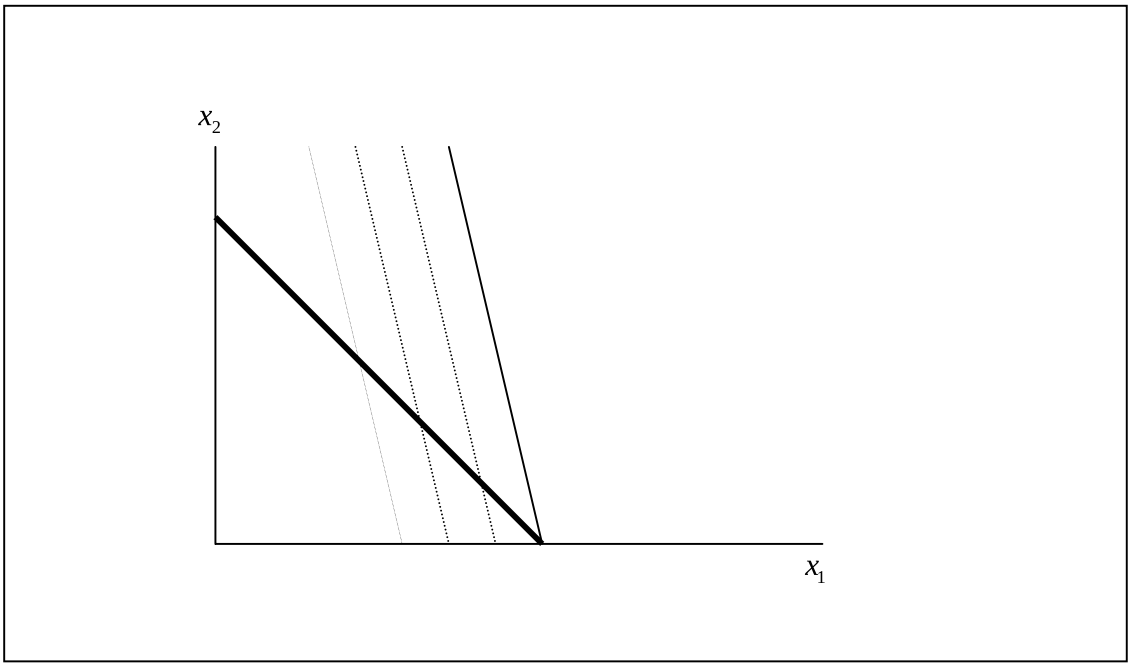
$$p_1x_1+p_2x_2\le I$$

$$x_1,x_2\ge 0$$

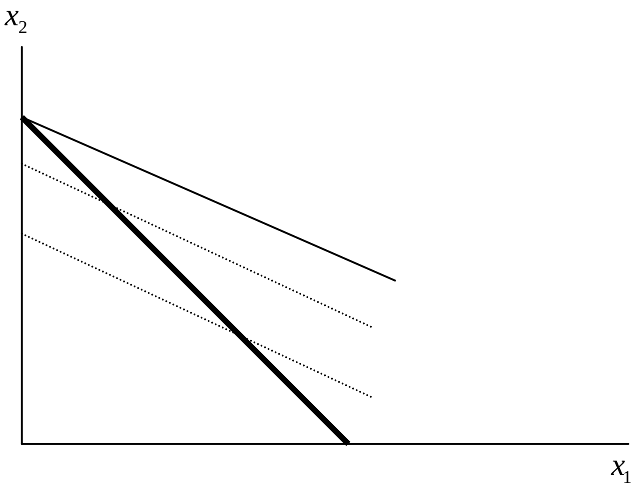
במקרה זה שיעור התחלופה השולי בצריכה בין מצרך 1 למצרך 2 קבוע,

$MRS_{1,2}=\frac{\alpha}{\beta}$. יחס המחירים אף הוא קבוע, על-כן קיימות שלוש אפשרויות:

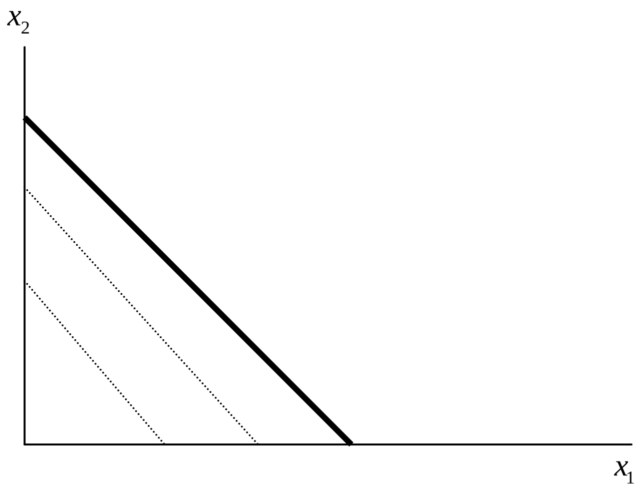
$$(\mathrm{I}) \quad \frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_1^* = \frac{I}{p_1}, x_2^* = 0$$



$$(\mathrm{II}) \quad \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_1^* = 0, x_2^* = \frac{I}{p_2}$$



$$(III)\quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{p_1}{p_2}\Rightarrow x_1^*\in\left[\frac{I}{p_1},0\right],x_2^*\in\left[0,\frac{I}{p_2}\right]$$



הפונקציה הקוואזי-ליניארית:

$$\max_{x_1, x_2} \quad \ln x_1 + x_2$$

$$s.t$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

תנאי סדר ראשון לפיתרון פנימי:

$$MRS_{1,2} = \frac{1}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

מתנאי סדר ראשון ניתן להסיק כי

$$x_1^* = \frac{p_2}{p_1}$$

נציב למגבלת התקציב ונקבל:

$$\cancel{p_1} \frac{p_2}{\cancel{p_1}} + p_2 x_2 = I \Rightarrow x_2^* = \frac{I}{p_2} - 1$$

ניתן לראות כי כמות מצרך 2 יכולה להיות שלילית ועל-כן נאכוף את מגבלת האי-שליליות ונקבל:

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{p_2}{p_1}, x_2^* = \frac{I}{p_2} - 1 \ if \ \frac{I}{p_2} \geq 1 \\ x_1^* = \frac{I}{p_1}, x_2^* = 0 \ if \ \frac{I}{p_2} \leq 1 \end{cases}$$

נשים לב כי פיתרון קצה יכול להתקבל בנקודת השקה או לחילופין בנקודת חיתוך בין קו התקציב לעקומה שוות התועלת.

פיתרון בעיית הצרכן כאשר הצרכן צורך יותר משני מצרכים:

פונקציית הלאגראנג'י הקשורה לפיתרון הבעיה המופיעה במשוואה (1) הינה

$$L = u\left(x_1, .., x_n\right) + \lambda\left[I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] \tag{12}$$

תנאי סדר ראשון לפיתרון פנימי הינם

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_i} = u_i - \lambda p_i = 0 \ \forall i = 1..n \\ &\Rightarrow u_i = \lambda p_i \ \forall i = 1..n \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

ניתן ללמוד כי לכל זוג מצרכים, i, j, מתקיים כי

$$MRS_{i,j} = \frac{u_i}{u_j} = \frac{p_i}{p_j} \tag{14}$$

נדגים:

$$\max_{x_1,..x_n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$s.t$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} p_i x_i \le I$$

$$x_1,..x_n \ge 0$$

נגזור את תנאי סדר ראשון ונסתייע בהם על-מנת לפתור את בעיית הצרכן:

$$MRS_{i,j} = \frac{x_j}{x_i} = \frac{p_i}{p_j} \Rightarrow p_i x_i = p_j x_j = k \;\; \forall i, j$$

$$\Rightarrow nk = I \Rightarrow k = \frac{I}{n} = p_i x_i$$

$$\Rightarrow x_i^* = \frac{I}{np_i}$$

מהו הרכב הצריכה האופטימאלי אם פונקציית התועלת היא

$\min\left\{x_1,..,x_n\right\}$?

במקרה זה אנו יודעים כי הצרכן צורך כמות שווה מכל מצרך, נקרא

לכמות זאת k. נציב למגבלת התקציב ונקבל כי

$$\sum_{i=1}^{n} p_i k = k\sum_{i=1}^{n} p_i = I \Rightarrow x_i^* = \frac{I}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

פיתרון בעיית הצרכן כאשר לרשות הצרכן סל תחילי:

במקרה זה כל שעלינו לעשות זה להחליף את ההכנסה בערך הסל

התחילי. לדוגמא, פיתרון בעיית הצרכן בפונקציית מינימום יראה:

$$x_1^* = \frac{\beta\left(p_1\overline{x}_1 + p_2\overline{x}_2\right)}{\beta p_1 + \alpha p_2}, x_2^* = \frac{\alpha\left(p_1\overline{x}_1 + p_2\overline{x}_2\right)}{\beta p_1 + \alpha p_2}$$

פיתרון בעיית הצרכן כאשר סביבת הצרכן איננה תחרותית:

צרכן צורך שני מצרכים , מצרך 1 ומצרך 2.

העדפות הצרכן ניתנות לייצוג על-ידי פונקצית התועלת $u\left(x_1,x_2\right)=x_1x_2$.

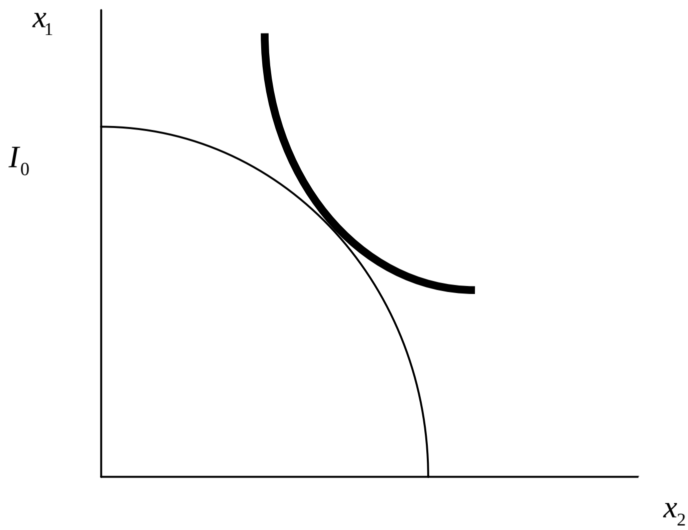
לרשות הצרכן הכנסה בגובה I_0, וידוע כי $p_2=1$.

מחירו של מצרך 1 שווה לפרופורציה קבועה מן הכמות הנצרכת ממצרך

זה, כלומר, $p_1=\alpha x_1$ כאשר $\alpha>0$.

מצאו את הסל האופטימאלי של הצרכן, והציגו את תשובתכם באיור

מתאים.



משוואת התקציב נתונה על-ידי: $\alpha x_1^2 + x_2 = I_0$

מתנאי האופטימום נובע כי $MRS_{1,2} = \frac{x_2}{x_1} = 2\alpha x_1$.

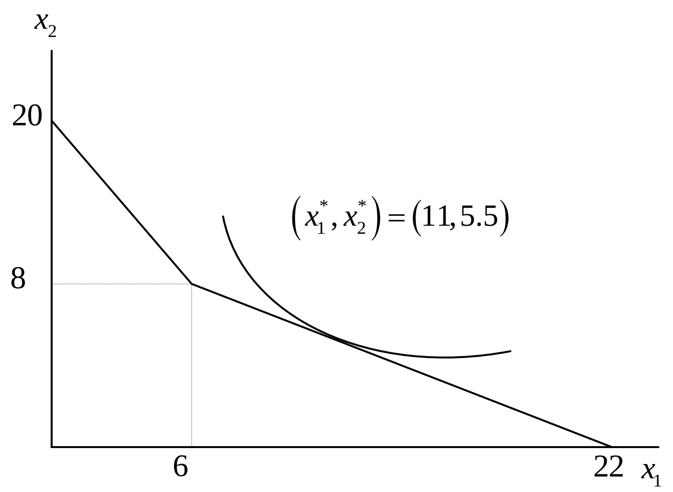
מהצבה לקו התקציב נקבל כי:

$$\alpha x_1^2 + 2\alpha x_1^2 = 3\alpha x_1^2 = I_0 \Rightarrow x_1^* = \sqrt{\frac{I_0}{3\alpha}},\ x_2^* = 2\alpha\left(\sqrt{\frac{I_0}{3\alpha}}\right)^2 = \frac{2}{3}I_0.$$

דוגמא נוספת:

צרכן צורך שני מצרכים, מצרך 1 ומצרך 2, יחס ההעדפה של הצרכן מיוצג על-ידי פונקציית התועלת $u(x_1,x_2)=x_1x_2$ ולרשותו של הצרכן סל תחילי $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=(0,20)$. מחירו של מצרך 2 שווה ל -1, $(p_2=1)$, אך מחירו של מצרך 1 משתנה. עד לכמות של 6 יחידות מחירו של מצרך 1 שווה ל-2 ₪ ליחידה, $(p_1=2)$, ומעבר לכמות של 6 יחידות מחירו של מצרך 1 שווה ל -0.5 ₪, $(p_1=0.5)$. מהו פיתרון בעיית הצרכן?

נאייר את קו התקציב:



משוואת קו התקציב נתונה על-ידי

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20 \text{ if } 0 \le x_1 \le 6 \\ 0.5x_1 + x_2 = 0.5*6+8=11 \text{ if } x_1 > 6 \end{cases}$$

נפעיל תנאי סדר ראשון על המגבלה העליונה ונקבל

$$\frac{x_2}{x_1} = 2 \Rightarrow x_2 = 2x_1$$

נציב לקו התקציב ונקבל:

$$4x_1 = 20 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 10, u = 50$$

נפעיל תנאי סדר ראשון על המקבלה השניה ונקבל

$$\frac{x_2}{x_1} = 0.5 \Rightarrow x_2 = 0.5x_1$$

נציב לקו התקציב ונקבל:

$$x_1 = 11 \Rightarrow x_2 = 5.5, u = 60.5$$

מכאן שזהו הפיתרון לבעיית הצרכן.