# מבחן - מבוא לאקונומטריקה

ד"ר ניר דגן
אוניברסיטת בן גוריון באילת
מועד ב תש"ע, 1 באוגוסט 2010

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון, ודף הנוסחאות המודפס עם הבחינה. אין להביא דף נוסחאות נוסף.

משך הבחינה שעתיים וחצי. בבחינה 6 שאלות יש לענות על כולן.

**1.** המודל הנכון הוא:

$$Y_i = \beta_2 X_{2i} + u_i$$

החוקר אמד בטעות את המודל:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

**1.1** כתוב את נוסחאות האומדים של החוקר ל-$\beta_1$ ול-$\beta_2$. אין צורך לפתח, אלא רק לכתוב את הנוסחאות.

**1.2** חשב את התוחלות של האומדים הנ"ל, תחת ההנחות הקלסיות, ותחת ההנחה שהמודל הנכון הוא כמו שכתוב לעיל.

**1.3** באילו תנאים האומדים הנ"ל יהיו חסר הטיה? BLUE?

במדגם של 24 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות:

(1) $\hat{Y}_i = 4 + 2X_{2i} + 3X_{3i} + 2X_{4i} \quad , \quad R^2 = 0.85$

(2) $\hat{Y}_i = 21 + 0.8X_{3i} \quad , \quad R^2 = 0.5$

(3) $\hat{Y}_i = 16 + 0.32X_{3i} + 0.3X_{4i} \quad , \quad R^2 = 0.67$

(4) $\hat{Y}_i = 4.2 + 2.3(X_{2i} + X_{3i} + X_{4i}) \quad , \quad R^2 = 0.6$

נסח את ההשערות להלן, וחשב את הסטטיסטי F הדרוש לבדיקתן:

**2.1** שהמודל (1) מובהק.

**2.2** שהמקדם של $X_4$ במודל (3) שווה לאפס.

**2.3** שבמודל (1) כל המקדמים של ה-$X$-ים שווים זה לזה.

נתון המודל הבא:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 D_{1i} + \beta_3 D_{2i} + \beta_4 (D_{1i} D_{2i}) + \beta_5 X_i + u_i$$

כאשר: $Y_i$ הוא השכר החודשי, $X_i$ הוא מספר שנות ותק, ו:

$$D_{1i} = \begin{cases} 1 \ , & \text{גבר } i \\ 0 \ , & \text{אישה } i \end{cases}$$

$$D_{2i} = \begin{cases} 1 \ , & \text{בעל תואר אקדמי } i \\ 0 \ , & \text{ללא תואר אקדמי } i \end{cases}$$

**3.1** נסח את ההשערה שאין הבדל בין גברים ונשים, שאין להם תואר אקדמי?
**3.2** כיצד תשנה את המודל כדי לבדוק את ההשערה ששנות ותק תורמות לשכר באופן שונה בין גברים ונשים? כתוב את המודל החדש ואת ההשערה שיש לבדוק.

**4** המודל הוא:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

במדגם לכל $i$ מתקיים $X_i > 0$.
בנוסף מתקיימת אחת משתי ההנחות האלטרנטיביות:

(2) $\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^2$

(3) $\sigma_i^2 = \gamma + \sigma^2 X_i^2$

עבור כל אחת משתי ההנחות הנ"ל, הסבר כיצד היית אומד את הפרמטרים של המודל.

**5** המודל הוא:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$
$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

החוקר הגדיר:

$$Y_t^* = Y_t - 0.8 Y_{t-1}$$
$$X_t^* = X_t - 0.8 X_{t-1}$$

ואמד את המשוואה:

$$\hat{Y}_t^* = 4 + 3X_t^*$$

**5.1** חשב את האומדים שהחוקר קיבל עבור $\beta_1$ ו-$\beta_2$
**5.2** לחוקר נודע כי $\rho = 0.82$. בהנחה ש-$\varepsilon_t$ מקיים את ההנחות הקלסיות, האם האומדים שקיבלת בסעיף הקודם הם מוטים? ואם לא האם הם BLUE? נמק בקצרה (אין צורך בהוכחה).

**6.** המודל הוא:

$$Y_{1i} = \beta_1 + \beta_2 Y_{2i} + u_{1i}$$
$$Y_{2i} = \gamma_1 + \gamma_2 Y_{1i} + \gamma_3 X_{3i} + \gamma_4 X_{4i} + u_{2i}$$

הנח כי $X_{3i}$ ו-$X_{4i}$ הם משתנים אקסוגניים והשאר אנדוגניים.
**6.1** הראה תוך שימוש במשוואות הצורה המצומצמת, עבור כל משוואה אם היא ניתנת לזיהוי, ואם הזיהוי מדויק או ביתר.
**6.2** האם ניתן לאמוד את הפרמטרים של המודל המבני, או את חלקם? אם כן הסבר כיצד. אם לא נמק.

## דף נוסחאות מבוא לאקונומטריקה

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2},\ \hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}$$

$$Var\left(\hat{\beta}_2\right) = \sigma_{\hat{\beta}_2}^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2},\ Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \sigma_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{\sigma_u^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

## תחזית ספציפית ותחזית לתוחלת

$$\hat{Y}\Big|_{X=X_0} = E(\hat{Y})\Big|_{X=X_0} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_0$$

$$Var\left(\hat{Y}\Big|_{X=X_0}\right) = \sigma_u^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(X_0 - \overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right),\ Var\left(E(\hat{Y})\Big|_{X=X_0}\right) = \sigma_u^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\left(X_0 - \overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right)$$

## מקדם ההסבר $R^2$ ומקדם המתאם: $r_{xy}$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}$$

יהי $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$. מתקבל:

$$\overline{\hat{Y}} = \overline{Y},\ \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}},\ R^2 = r_{xy}^2$$

## אומד לשונות של $u_i$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n-2}$$

## רווחי סמך ובדיקת השערות

רווח סמך לפרמטר $q$

$$\hat{q} - c\sigma \le q \le \hat{q} + c\sigma$$

כאשר:

- $\hat{q}$ הוא האומד ל-$q$.
- $\sigma$ היא סטיית התקן או האומד לסטיית התקן של $q$.
- אם סטיית התקן ידועה, $c$ הוא הערך הקריטי מטבלת ההתפלגות הנורמלית.
- אם סטיית התקן איננה ידועה, אלא נאמדת, $c$ הוא הערך הקריטי מטבלת התפלגות $t$.

**בדיקת השערות ברגרסיה רבת משתנים: מבחן wald**

$p$ מספר האילוצים בהשערת האפס.

$k$ מספר הפרמטרים במודל הלא-מוגבל כולל חותך.

$k-1$ מספר המשתנים המסבירים במודל הלא-מוגבל (לא כולל חותך).

$$F = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2(\text{מ}) - \sum_{i=1}^{n} e_i^2(\text{למ})\right)/p}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2(\text{למ})/(n-k)} \sim F(p,\, n-k)$$

כאשר המשתנה המוסבר זהה בשני המודלים המוגבל והלא מוגבל, ניתן לקבל נוסחא פשוטה יותר:

$$F = \frac{\left(R^2(\text{למ}) - R^2(\text{מ})\right)/p}{\left(1 - R^2(\text{למ})\right)/(n-k)} \sim F(p,\, n-k)$$

כאשר בודקים את ההשערה:

$$H_0 : \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$$

מקבלים נוסחא פשוטה עוד יותר:

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{\left(1 - R^2\right)/(n-k)} \sim F(k-1,\, n-k)$$