

מבחן - מבוא לאקונומטריקה

ד"ר ניר דגן
אוניברסיטת בן גוריון באילת
מועד א תש"ע, 11 ביולי 2010

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון, ודף הנוסחאות המודפס עם הבחינה. אין להביא דף נוסחאות נוסף.

משך הבחינה שעתיים וחצי. בבחינה 6 שאלות יש לענות על כולן.

1. המודל הנכון הוא:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

החוקר אמד בטעות את המודל:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

1.1 מה נוסחת האומד של החוקר ל- β_2 ?

1.2 חשב את התוחלת של האומד הנ"ל, תחת ההנחות הקלסיות.

1.3 באילו תנאים האומד הנ"ל יהיה חסר הטיה?

במדגם של 24 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות:

$$(1) \hat{Y}_i = 4 + 2X_{2i} + 3X_{3i} + 2X_{4i}, \quad R^2 = 0.8$$

$$(2) \hat{Y}_i = 21 + 0.8X_{2i}, \quad R^2 = 0.67$$

$$(3) \hat{Y}_i = 16 + 0.32X_{3i} + 0.3X_{4i}, \quad R^2 = 0.5$$

$$(4) \hat{Y}_i = 4.2 + 2.3(X_{2i} + X_{3i} + X_{4i}), \quad R^2 = 0.6$$

נסח את ההשערות להלן, וחשב את הסטטיסטי F הדרוש לבדיקתן:

2.1 שהמודל (1) מובהק.

2.2 שהמקדם של X_2 במודל (1) שווה לאפס.

2.3 שבמודל (1) כל המקדמים של ה- X -ים שווים זה לזה.

נתון המודל הבא:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 D_{1i} + \beta_3 D_{2i} + \beta_4 (D_{1i} D_{2i}) + \beta_5 X_i + u_i$$

כאשר: Y_i הוא השכר החודשי, X_i הוא מספר שנות ותק, ו:

$$D_{1i} = \begin{cases} 1, & i \text{ גבר} \\ 0, & i \text{ אישה} \end{cases}$$

$$D_{2i} = \begin{cases} 1, & i \text{ בעל תואר אקדמי} \\ 0, & i \text{ ללא תואר אקדמי} \end{cases}$$

לכל אחת מההשערות להלן, נסח את ההשערה, וציין כיצד תבצע את בדיקת ההשערה.

3.1 שאין הבדל בין גברים ונשים?

3.2 שהשפעת תואר אקדמי על השכר זהה אצל גברים ונשים?

3.3 שהשפעת תואר אקדמי על השכר אצל גברים הוא אפס?

4 המודל הוא:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

במדגם לכל i מתקיים $X_i > 0$.

אבל החוקר אמד את המודל:

$$\frac{Y_i}{X_i^2} = \beta_1 \frac{1}{X_i^2} + \beta_2 \frac{1}{X_i} + \varepsilon_i$$

4.1 מה החוקר מאמין לגבי השונות של u_i ?

4.2 בהתאם לתשובתך בסעיף הקודם, מה ניתן לאמוד ע"י:

$$\frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}$$

?

5 המודל הוא:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

החוקר הגדיר:

$$Y_t^* = Y_t - 0.8Y_{t-1}$$

$$X_t^* = X_t - 0.8X_{t-1}$$

ואמד את המשוואה:

$$\hat{Y}_t^* = 4 + 3X_t^*$$

5.1 חשב את האומדים שהחוקר קיבל עבור β_1 ו- β_2 .

5.2 לחוקר נודע כי $\rho = 0.82$. בהנחה ש- ε_t מקיים את ההנחות הקלסיות, האם האומדים שקיבלת בסעיף הקודם הם מוטים? ואם לא האם הם BLUE? נמק בקצרה (אין צורך בהוכחה).

6. המודל הוא:

$$Y_{1i} = \beta_1 + \beta_2 Y_{2i} + u_{1i}$$

$$Y_{2i} = \gamma_1 + \gamma_2 Y_{1i} + \gamma_3 X_i + u_{2i}$$

הנח כי X_i הוא משתנה אקסוגני והשאר אנדוגניים.

6.1 הראה תוך שימוש במשוואות הצורה המצומצמת, עבור כל משוואה אם היא ניתנת לזיהוי, ואם הזיהוי מדויק או ביתר.

6.2 החוקר אמד את המשוואות:

$$\hat{Y}_{1i} = 3 + 4X_i$$

$$\hat{Y}_{2i} = 5 + 6X_i$$

האם ניתן לאמוד פרמטרים של המודל המבני בעזרת האמידה הנ"ל? אם כן חשב אם האומדים. אם לא נמק.

דף נוסחאות מבוא לאקונומטריקה

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \sigma_u^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \text{Var}(\hat{\beta}_1) = \sigma_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{\sigma_u^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

תחזית ספציפית ותחזית לתוחלת

$$\hat{Y}|_{X=X_0} = E(\hat{Y})|_{X=X_0} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_0$$

$$\text{Var}(\hat{Y}|_{X=X_0}) = \sigma_u^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right), \text{Var}(E(\hat{Y})|_{X=X_0}) = \sigma_u^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)$$

מקדם ההסבר R^2 ומקדם המתאם: r_{xy}

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

יהי $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$. מתקבל:

$$\bar{\hat{Y}} = \bar{Y}, \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}, R^2 = r_{xy}^2$$

אומד לשונות של u_i

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{n - 2}$$

רווחי סמך ובדיקת השערות

רווח סמך לפרמטר q

$$\hat{q} - c\sigma \leq q \leq \hat{q} + c\sigma$$

כאשר:

- \hat{q} הוא האומד ל- q .
- σ היא סטיית התקן או האומד לסטיית התקן של q .
- אם סטיית התקן ידועה, c הוא הערך הקריטי מטבלת ההתפלגות הנורמלית.
- אם סטיית התקן איננה ידועה, אלא נאמדת, c הוא הערך הקריטי מטבלת התפלגות t .

בדיקת השערות ברגרסיה רבת משתנים: מבחן wald

p מספר האילוצים בהשערת האפס.

k מספר הפרמטרים במודל הלא-מוגבל כולל חותך.

$k - 1$ מספר המשתנים המסבירים במודל הלא-מוגבל (לא כולל חותך).

$$F = \frac{(\sum_{i=1}^n e_i^2(n) - \sum_{i=1}^n e_i^2(n\ell)) / p}{\sum_{i=1}^n e_i^2(n\ell) / (n - k)} \sim F(p, n - k)$$

כאשר המשתנה המוסבר זהה בשני המודלים המוגבל והלא מוגבל, ניתן לקבל נוסחא פשוטה יותר:

$$F = \frac{(R^2(n\ell) - R^2(n)) / p}{(1 - R^2(n\ell)) / (n - k)} \sim F(p, n - k)$$

כאשר בודקים את ההשערה:

$$H_0 : \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

מקבלים נוסחא פשוטה עוד יותר:

$$F = \frac{R^2 / (k - 1)}{(1 - R^2) / (n - k)} \sim F(k, n - k)$$

Table of the Upper Percentage Points of the F distribution

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15
1	.05	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	246
	.01	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6082	6106	6157
2	.05	18.51	19.00	19.16	19.25	19.39	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.4	19.4	19.4
	.01	98.49	99.01	99.17	99.25	99.30	99.33	99.34	99.36	99.38	99.40	99.4	99.4	99.4
3	.05	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74	8.70
	.01	34.12	30.81	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05	26.87
4	.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91	5.86
	.01	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.54	14.95	14.37	14.2
5	.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70	4.68	4.62
	.01	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.45	10.27	10.15	10.05	9.96	9.89	9.72
6	.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.94
	.01	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.56
7	.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57	3.51
	.01	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.84	6.71	6.62	6.54	6.47	6.31
8	.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28	3.22
	.01	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82	5.74	5.67	5.52
9	.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.01
	.01	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	4.96
10	.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91	2.85
	.01	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85	4.78	4.71	4.56
20	.05	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.31	2.28	2.20
	.01	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.30	3.23	3.09
30	.05	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.01
	.01	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.90	2.84	2.70
40	.05	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.92
	.01	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.52
50	.05	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.98	1.95	1.87
	.01	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.62	2.56	2.42
Inf	.05	3.85	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.66
	.01	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.24	2.18	2.03