מבוא לאקונומטריקה - שאלות ממבחנים עם פתרונות

21 בפברואר 2007

שאלה 4

חוקר אמד את המשוואות:

(1) $Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$ וקיבל $R^2 = 0.2$.

(2) $Y_i = \gamma + \delta(X_{1i} + X_{2i}) + v_i$ וקיבל $R^2 = 0.1$.

במדגם 43 תצפיות.

א. האם מודל (1) מובהק ברמת מובהקות של 5%?

ב. אילו מההשערות ניתן לבדוק? בדוק את ההשערה שניתן לבדוק ברמת מובהקות של 5%.

$H_0 : \beta_1 = \beta_2$

$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$

או

$H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1$

$H_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq 1$

פיתרון

א. אנו רוצים לבדוק את ההשערה:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$

$H_1 : \beta_1 \neq 0$ ו\או $\beta_2 \neq 0$

נחשב את הססטיסטי:

$$F = \frac{R^2 / k}{\left(1 - R^2\right) / (n - k - 1)} = \frac{0.2 / 2}{(1 - 0.2) / (43 - 2 - 1)} = \frac{0.1}{0.8 / 40} = 5$$

בודקים בטבלה את הערך הקריטי ברמת מובהקות 5% ובדרגות חופש $(2, 40)$. מתקבל הערך 3.23. ולכן דוחים את השערת האפס.

ב. במודל (2) מתקיים $\beta_1 = \beta_2 = \delta$ ולכן ניתן לבדוק את ההשערה

$H_0 : \beta_1 = \beta_2$

$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$

לבדיקת ההשערה, נחשב את הסטטיסטי:

$$F = \frac{\left(R^2(\text{למ}) - R^2(\text{מ})\right) / p}{\left(1 - R^2(\text{למ})\right) / (n - k - 1)} = \frac{(0.2 - 0.1) / 1}{(1 - 0.2) / (43 - 2 - 1)} = \frac{0.1}{0.8 / 40} = 5$$

בודקים בטבלה את הערך הקריטי ברמת מובהקות 5% ובדרגות חופש $(1, 40)$. מתקבל הערך 4.08. ולכן דוחים את השערת האפס.

26 בפברואר 2006

שאלה 3

חוקר אמד מודל רגרסיה לינארית ממדגם של 32 תצפיות וקיבל את התוצאות הבאות:

$$\overline{X}=\overline{Y}=20;\ \sum_{i=1}^{n}X_i^2=18000;\ \sum_{i=1}^{n}Y_i^2=16000;\ \sum_{i=1}^{n}X_i\mathrm{Yi};=15400;\ \hat{\sigma}_u^2=63$$

3.1 חשב את אומדי הריבועים הפחותים לקו הרגרסיה ואת R^2.

3.2 בנה רווח סמך לתחזית עבור $X_0=30$ ברמת ביטחון של 95%.

פיתרון

3.1 נשתמש בנוסחאות ונחשב:

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-n\overline{X}\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}-n\overline{X}^2}=\frac{15400-32\times20\times20}{18000-32\times20^2}=\frac{2600}{5200}=\frac{1}{2}$$

$$\hat{\alpha}=\overline{Y}-\hat{\beta}\overline{X}=20-\frac{1}{2}\times20=10$$

ברגרסיה עם משתנה מסביר יחיד:

$$R^2=r_{xy}^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}=\frac{(-2600)^2}{5200\times\left(16000-32\times20^2\right)}=\frac{6760000}{16640000}=0.40625$$

3.2 נשתמש בנוסחא בדף הנוסחאות, ונציב $X_0=30$

$$\hat{Y}\Big|_{X=X_0}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_0=10+\frac{1}{2}30=25$$

$$Var\left(\hat{Y}\Big|_{X=X_0}\right)=\sigma_u^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\left(X_0-\overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\right)=\sigma_u^2\left(1+\frac{1}{32}+\frac{(30-20)^2}{5200}\right)=\sigma_u^2\left(1+\frac{1}{32}+\frac{1}{52}\right)$$

האומד לשונות התחזית מחושב לפי הנוסחא לעיל, תוך שימוש באומד לשונות הרעש:

$$\text{אומד לשונות התחזית}=\hat{\sigma}_u^2\left(1+\frac{1}{32}+\frac{1}{52}\right)=63\left(1+\frac{1}{32}+\frac{1}{52}\right)=66.18$$

ערך הקריטי מטבלת t הוא 1.96. לפיכך, רווח הסמך הוא:

$$25-1.96\sqrt{66.18}\le\hat{Y}\le25+1.96\sqrt{66.18}$$

5 בפברואר 2006

שאלה 3

על סמך מדגם של 40 תצפיות נאמדה משוואת התצרוכת הבאה:

$$\hat{Y}_i=22+0.3X_i$$

בנוסף $\hat{\sigma}_u^2=0.1;\ \overline{Y}=55$

חשב רווח סמך לתחזית של Y, עבור $X_0=\overline{X}$ ברמת סמך של 95%.

פיתרון

מהנוסחא:

$$\hat{\alpha}=\overline{Y}-\hat{\beta}\overline{X}$$

נקבל:

$$\overline{Y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\overline{X}$$

נשתמש בנוסחא בדף הנוסחאות, ונציב $X_0 = \overline{X}$

$$\hat{Y}\Big|_{X=X_0} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\overline{X} = \overline{Y} = 55$$

$$Var\left(\hat{Y}\Big|_{X=X_0}\right) = \sigma_u^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(X_0 - \overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right) = \sigma_u^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

האומד לשונות התחזית מחושב לפי הנוסחא לעיל, תוך שימוש באומר לשונות הרעש:

$$\text{אומד לשונות התחזית} = \hat{\sigma}_u^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.1\left(1 + \frac{1}{40}\right) = 0.0976$$

ערך הקריטי מטבלת t הוא 1.96. לפיכך, רווח הסמך הוא:

$$55 - 1.96\sqrt{0.0976} \le \hat{Y} \le 55 + 1.96\sqrt{0.0976}$$

שאלה 4

חוקר מעוניין לאמוד את המודל $Y_i = \beta X_i + u_i$. חשב את נוסחת אומד ריבועים פחותים לפרמטר β ע"י פיתרון בעיית המינימיזציה של סכום ריבועי הסטיות.

פיתרון

נגדיר עבור האומד $\hat{\beta}$ את e_i

$$e_i = Y_i - \hat{\beta}X_i$$

אומד ריבועים פחותים הוא פיתרון לבעיית האופטימיזציה הבאה:

$$\min_{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

או בצורה מפורשת:

$$\min_{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}X_i\right)^2$$

תנאי סדר ראשון לפתרון הבעיה הוא:

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}X_i\right)X_i = 0$$

מתוך תנאי הסדר הראשון ניתן לפתור את האומד:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

ת"א 23 בינואר 2003

שאלה 5

חוקרת מבקשת לאמוד את השפעת ההשכה על השכר של הפרטים בישראל. לשם כך היא אומדת את המודל הבא:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

כאשר Y_i הוא השכר לשעה של פרט i ואילו X_i שווה למספר שנות הלימוד של אותו פרט.

נתון כי במדגם:

$$\text{שונות המדגם} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n} = 100;\ n = 101$$

החוקרת מעונינת לקבל אומד מדויק יותר ל-β עם שונות נמוכה יותר. בפניה שתי אפשרויות:

A. להגדיל את המדגם ב-100 תצפיות כך ששונות המדגם תגדל ב-50.

B. להגדיל את שונות המדגם ל-200 ע"י הוספת 50 תצפיות נוספות.

הנח שבשני המקרים $\hat{\sigma}_u^2$ נשאר ללא שינוי. אילו מבין הטענות הבאות נכונות?

1. אפשרות A עדיפה על B.
2. אפשרות B עדיפה על A.
3. אין הבדל בין A ל-B.
4. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

פיתרון

באפשרות A:

$$\text{שונות המדגם} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n} = 150;\ n = 201$$

כך ש:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 = 150\times 201 = 30150$$

באפשרות B:

$$\text{שונות המדגם} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n} = 200;\ n = 151$$

כך ש:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 = 200\times 151 = 30200$$

השונות של האומד היא:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$$

אי לכך, על מנת להשיג שונות נמוכה יותר אפשרות B עדיפה.

ת"א 29 בינואר 2003

נתונים לשאלות 2 ו-3

ברגרסיה של Y על X (במדגם של 122 תצפיות) נתקבל:

פרמטר	אומד	סטיית תקן של האומד	ערך t של האומד
α	250.5	32.5	7.7077
β	3.75	1.7	2.2059

שאלה 2

על סמך רווח סמך ברמת מובהקות של 5% ל-α ניתן לקבוע כי:

1. α איננו שונה באופן מובהק מ-0.

2. α איננו קטן מ-250.5.
3. α איננו גדול מ-315.5.
4. α איננו קטן מ-218.

פיתרון

נחשב את רווח הסמך ל-α. ערך t הקריטי הוא 1.96. לפיכך:

$$250.5 - 1.96\times32.5 \le \alpha \le 250.5 + 1.96\times32.5$$

או:

$$186.8 \le \alpha \le 314.2$$

ולכן תשובה 3 נכונה.

שאלה 3

הועלו שתי טענות

I. אם ידוע כי $\overline{X} = 10$ אז חייב להיות כי $\overline{Y} = 288$.

II. הגידול ב-Y כתוצאה מהגדלה ביחידה של X גדול יותר ככל ש-X גדול יותר.

1. רק טענה I נכונה.
2. רק טענה II נכונה.
3. שתי הטענות נכונות.
4. שתי הטענות אינן נכונות.

פיתרון

מתוך הנוסחא של $\hat{\alpha}$ מקבלים:

$$\overline{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\overline{X}$$

לבדיקת טענה I נציב $\overline{X} = 10$.

$$\overline{Y} = 250.5 + 3.75\times10 = 288$$

ולכן טענה I נכונה.

טענה II איננה נכונה כי כי הגדלת X ביחידה אחת תמיד תגדיל את Y ב-β יחידות.

לאור האמור לעיל התשובה הנכונה היא 1.

ת"א 20 בפברואר 2002

שאלה 6

נתון כי:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right) = 30;\ \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 100;\ \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = 81$$

נאמדה הרגרסיה הבאה:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

הועלו הטענות הבאות:

A. $r_{xy} = 0.0033$

B. $\hat{\beta} = 0.3$

1. רק טענה A נכונה.

2. רק טענה B נכונה.
3. שתי הטענות נכונות.
4. שתי הטענות אינן נכונות.

פיתרון

$$r_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}}=\frac{30}{\sqrt{100\times 81}}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}\neq 0.0033$$

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}=\frac{30}{100}=0.3$$

אי לכך רק טענה B נכונה והתשובה הנכונה היא 2.