דף נוסחאות מבוא לאקונומטריקה

מאת ניר דגן <http://he.nirdagan.com/bio> 15 בינואר 2009

חשבונות עם סכומים וממוצע של סדרת מספרים

$$\sum_{i=1}^{n} aX_i = a\sum_{i=1}^{n} X_i,\ \sum_{i=1}^{n} a = na,\ \sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i,\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})Y_i = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - n\overline{X}\overline{Y}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})X_i = \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - n\overline{X}^2$$

מושגי יסוד בהסתברות

יהיו $a,\ b$ קבועים ו-$X,\ Y$ משתנים מקריים.

$$E(a) = a,\ E(aX) = aE(X),\ E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$
$$Var(X) = E(X - E(X))^2,\ Cov(X,\ Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y))$$
$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

רגרסיה עם משתנה מסביר יחיד

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

ההנחות הקלסיות:

0. X_i אינם משתנים מקריים.
1. לכל i: $E(u_i) = 0$
2. לכל i: $E\left(u_i^2\right) = \sigma_u^2$
3. לכל $i \neq j$: $E\left(u_iu_j\right) = 0$
4. לכל $i \neq j$: $u_i,\ u_j$ בלתי תלויים, ומתפלגים לפי ההתפלגות הנורמלית.

אומדי ריבועים פחותים

הגדרת e_i ומינימיזציה של הנזק

$$e_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i,\ \min_{\hat{\alpha},\hat{\beta}} \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

פיתרון

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} e_iX_i = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2},\ \hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}$$

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2},\ Var\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{\sigma_u^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$$

תחזית ספציפית ותחזית לתוחלת

$$\hat{Y}\Big|_{X=X_0} = E(\hat{Y})\Big|_{X=X_0} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_0$$

$$Var\left(\hat{Y}\Big|_{X=X_0}\right) = \sigma_u^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\right),\ Var\left(\hat{E(Y)}\Big|_{X=X_0}\right) = \sigma_u^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\right)$$

מקדם ההסבר R^2 ומקדם המתאם: r_{xy}

$$R^2 = 1-\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}$$

יהי $\hat{Y}_i = \hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i$. מתקבל:

$$\overline{\hat{Y}} = \overline{Y},\ \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\overline{Y}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}e_i^2$$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}},\ R^2 = r_{xy}^2$$

אומד לשונות של u_i

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{n-2}$$

רווחי סמך ובדיקת השערות

רווח סמך לפרמטר q

$$\hat{q}-c\sigma \le q \le \hat{q}+c\sigma$$

כאשר:

- $\hat{q}$ הוא האומד ל-q.
- σ היא סטיית התקן או האומד לסטיית התקן של q.
- אם סטיית התקן ידועה, c הוא הערך הקריטי מטבלת ההתפלגות הנורמלית.
- אם סטיית התקן איננה ידועה, אלא נאמדת, c הוא הערך הקריטי מטבלת התפלגות t.

$$\frac{\hat{\beta}-\beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2),\ \frac{\hat{\alpha}-\alpha_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}} \sim t(n-2)$$

בדיקת השערות ברגרסיה רבת משתנים: מבחן wald

$$F = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}e_i^2(\text{מ})-\sum_{i=1}^{n}e_i^2(\text{למ})\right)/p}{\sum_{i=1}^{n}e_i^2(\text{למ})/(n-k-1)} \sim F(p,\ n-k-1)$$

כאשר המשתנה המוסבר זהה בשני המודלים המוגבל והלא מוגבל, ניתן לקבל נוסחא פשוטה יותר:

$$F = \frac{\left(R^2(\text{למ})-R^2(\text{מ})\right)/p}{\left(1-R^2(\text{למ})\right)/(n-k-1)} \sim F(p,\ n-k-1)$$

כאשר בודקים את ההשערה:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$$

מקבלים נוסחא פשוטה עוד יותר:

$$F = \frac{R^2/k}{\left(1-R^2\right)/(n-k-1)} \sim F(k,\ n-k-1)$$