בוחן במבוא לאקונומטריקה

25 באפריל 2010, בשעה 9:00 ד"ר ניר דגן. סמסטר ב' תש"ע.

משך המבחן שעה אחת. יש 8 שאלות אמריקאיות. יש לענות על כולן. יש לסמן את התשובה הנכונה בגוף השאלון. ולהגיש את השאלון.

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון.

1. המודל הוא $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$. שני חוקרים אמדו את הפרמטרים בריבועים פחותים משני מדגמים שונים. חוקר שלישי הציע לאמוד את β_2 ע"י חישוב ממוצע פשוט בין האומדים של החוקרים האחרים.

א. האומד של החוקר השלישי שווה לאומד ריבועים פחותים של המדגם המשותף של שני החוקרים.
ב. האומד של החוקר השלישי מוטה.
ג. האומד של החוקר השלישי חסר הטיה ובעל שונות גבוהה יותר משל אומד ריבועים פחותים של המדגם המשותף.
ד. האומד של החוקר השלישי איננו לינארי.

2. המודל הנכון הוא $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$. חוקר אמד את הפרמטרים $\beta_1, \ \beta_2$ ע"י אמידת המודל השגוי $Y_i = \beta_1 + \beta_2 Z_i + u_i$. ייתכנו שתי אפשרויות שונות. לכל i:

(1) $Z_i = X_i + 3$

(2) $Z_i = 3X_i$

א. אם מתקיימת אפשרות (1), האומדים ל-β_1 ול-β_2 הם חסרי הטיה.
א. אם מתקיימת אפשרות (2), האומדים ל-β_1 ול-β_2 הם חסרי הטיה.
ג. אם מתקיימת אפשרות (1), האומד ל-β_1 הוא חסר הטיה ואילו האומד ל-β_2 הוא מוטה.
ד. אם מתקיימת אפשרות (1), האומד ל-β_2 הוא חסר הטיה ואילו האומד ל-β_1 הוא מוטה.

3. המודל הוא $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$. חוקר א' אמד ע"י מדגם של 20 תצפיות, ואילו חוקר ב' ע"י מדגם של 40 תצפיות. עבור כל ערך של X המופיע במדגם של חוקר א' הערך מופיע בדיוק פעמיים במדגם של חוקר ב'. נסמן ב-$\hat{\beta}_2(\text{א})$ את האומד של ל-β_2 של חוקר א'.

א. $\text{var}\left(\hat{\beta}_2(\text{א})\right) = 2\text{var}\left(\hat{\beta}_2(\text{ב})\right)$
ב. $\text{var}\left(\hat{\beta}_2(\text{א})\right) = 4\text{var}\left(\hat{\beta}_2(\text{ב})\right)$
ג. $\text{var}\left(\hat{\beta}_2(\text{א})\right) > \text{var}\left(\hat{\beta}_2(\text{ב})\right)$ אבל מפני שאין מספיק נתונים לא ניתן לדעת בדיוק פי כמה גדולה השונות של האומד של חוקר א' מזה של חוקר ב'.
ד. $\text{var}\left(\hat{\beta}_2(\text{א})\right), \ \text{var}\left(\hat{\beta}_2(\text{ב})\right)$ תלויים גם בערכי Y ולכן לא ניתן לדעת איזו שונות גדולה יותר.

4. במודל: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$, נבדקה ההשערה הבאה ברמת מובהקות של 5%:

$H_0: \ \beta_2 = 0$

$H_1: \ \beta_2 \neq 0$

ידוע כי השערת האפס נדחתה, וכן כי $\hat{\beta}_2 > 0$.
כעת רוצים לבדוק את ההשערה:

$H_0: \ \beta_2 = 0$

$H_1: \ \beta_2 > 0$

א. השערת האפס תידחה ברמת מובהקות של 5% אך ייתכן כי תתקבל ברמת מובהקות 3%.
ב. השערת האפס תידחה ברמת מובהקות של 5% אך תתקבל ברמת מובהקות 3%.
ג. השערת האפס תידחה ברמת מובהקות של 5% וכן תידחה ברמת מובהקות 3%.
ד. השערת האפס תתקבל ברמת מובהקות של 5%.

נתונים לשאלות 5–8

הנתונים להלן מתייחסים לשאלות 5–8.

חוקר אמד את המודל: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ בריבועים פחותים, במדגם של 22 תצפיות, וקיבל:

$$\hat{\beta}_1 = -3;\ \hat{\beta}_2 = 2;\ \hat{\sigma}_u^2 = 144;\ \overline{X} = 30;\ \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 225;\ \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = 3780$$

שאלה 5

א. $\overline{Y} = 12$.
ב. $\overline{Y} = 57$.
ג. $\overline{Y} = 63$.
ד. $\overline{Y} = 18$.

שאלה 6

רווח סמך ל-β_2 ברמת מובהקות 5% הינו:

א. $0.62 \le \beta_2 \le 3.38$.
ב. $0.3312 \le \beta_2 \le 3.6688$.
ג. $0.88 \le \beta_2 \le 3.12$.
ד. $0.665 \le \beta_2 \le 3.335$.

שאלה 7

רווח סמך לתחזית ספציפית ל-Y עבור $X_0 = \overline{X}$ ברמת מובהקות 5% הינו:

א. $52.58 \le Y \le 61.42$.
ב. $35.834 \le Y \le 78.166$.
ג. $51.66 \le Y \le 62.34$.
ד. $31.41 \le Y \le 82.59$.

שאלה 8

א. $R^2 = 0.3948$.
ב. $R^2 = 0.6743$.
ג. $R^2 = 0.2381$.
ד. $R^2 = 0.2594$.

דף נוסחאות מבוא לאקונומטריקה

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2},\ \hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}$$

$$Var\left(\hat{\beta}_2\right) = \sigma_{\hat{\beta}_2}^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2},\ Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \sigma_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{\sigma_u^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

תחזית ספציפית ותחזית לתוחלת

$$\hat{Y}\Big|_{X=X_0} = E(\hat{Y})\Big|_{X=X_0} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_0$$

$$Var\left(\hat{Y}\Big|_{X=X_0}\right) = \sigma_u^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(X_0 - \overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right),\ Var\left(E(\hat{Y})\Big|_{X=X_0}\right) = \sigma_u^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\left(X_0 - \overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right)$$

מקדם ההסבר R^2 ומקדם המתאם: r_{xy}

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}$$

יהי $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$. מתקבל:

$$\overline{\hat{Y}} = \overline{Y},\ \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}},\ R^2 = r_{xy}^2$$

אומד לשונות של u_i

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n-2}$$

רווחי סמך ובדיקת השערות

רווח סמך לפרמטר q

$$\hat{q} - c\sigma \le q \le \hat{q} + c\sigma$$

כאשר:

- $\hat{q}$ הוא האומד ל-q.
- σ היא סטיית התקן או האומד לסטיית התקן של q.
- אם סטיית התקן ידועה, c הוא הערך הקריטי מטבלת ההתפלגות הנורמלית.
- אם סטיית התקן איננה ידועה, אלא נאמדת, c הוא הערך הקריטי מטבלת התפלגות t.

Student's t Distribution

df	**Critical Values of Student's t**					
1-tailed	.10	.05	.025	.01	.005	.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	1.683	2.353	3.182	4.5415	5.841	12.941
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	4.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
Inf	1.282	1.645	1.960	2.236	2.576	3.291